

ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 15

ESEMPI

• Sia $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ con

$$\Gamma = \{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, x + y + 2z = 2\}.$$

Determinare max/min assoluti di f in Γ .

f è continua in $\mathbb{R}^3$ e Γ è chiuso e limitato.

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \\ (x + \frac{1}{4})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{9}{8} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \nearrow \Gamma \text{ è limitato!} \\ \text{circonferenza} \end{array}$$

Poniamo

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0, \quad g_2(x, y, z) = x + y + 2z - 2 = 0.$$

Regolarità:

$$\begin{bmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

il rango non vale $m=2$ se e solo se $\frac{2x}{1} = \frac{2y}{1} = -\frac{1}{2}$

ovvero per $(x, y, z) = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, z) \notin \Gamma$ e quindi tutti i punti di Γ sono regolari.

Moltiplicatori: risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \\ g_1 = 0, g_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda 2x + \mu \\ 2y = \lambda 2y + \mu \\ 2z = -\lambda + 2\mu \\ x^2 + y^2 = z \\ x + y + 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sottraendo} \\ 2(x-y) = 2\lambda(x-y) \\ \lambda = 1 \quad x = y \end{array}$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \quad \text{impossibile} \\ 2z = -1 \\ x^2 + y^2 = -\frac{1}{2} \\ x + y - 1 = 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x = y \\ 2x = 2\lambda x + \mu \\ 2z = -\lambda + 2\mu \\ 2x^2 = z \\ 2x + 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 2x + 4x^2 = 2 \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, x = \frac{1}{2} \end{array}$$

$\emptyset$

Quindi i punti stazionari vincolati sono:

$$(-1, -1, 2), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Dato che f è continua e Γ è compatto per il teorema di Weierstrass i punti di max/min esistono e per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange tali punti sono tra i punti stazionari vincolati. Confrontando i valori si ha che

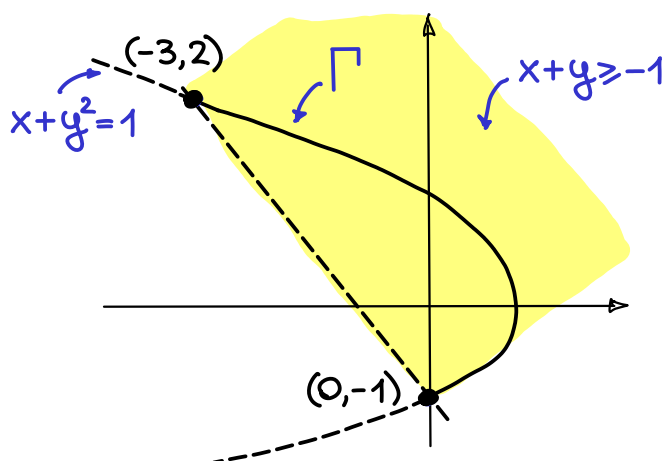
$$\begin{array}{ll} \boxed{f(-1, -1, 2) = 6} & \Rightarrow (-1, -1, 2) \text{ è un punto di max assoluto} \\ \boxed{f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}} & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ è un punto di min assoluto} \end{array}$$

• Sia $f(x, y) = xy - y^2$ con

$$\Gamma = \{(x, y) : x + y^2 = 1, x + y \geq -1\}.$$

Determinare max/min assoluti di f in Γ .

f è continua in $\mathbb{R}^2$ e Γ è chiuso e limitato.



$$\begin{array}{l} \begin{cases} x + y^2 = 1 \\ x + y = -1 \end{cases} \\ -y - 1 + y^2 = 1 \\ y^2 - y - 2 = 0 \rightarrow \begin{array}{l} y = -1 \\ y = 2 \end{array} \\ (0, -1), (-3, 2) \end{array}$$

Sia $g(x, y) = x + y^2 - 1 = 0$. $\nabla g(x, y) = (1, 2y) \neq (0, 0)$.
punti regolari

Punti stazionari vincolati in $g(x,y)=0$:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \lambda \\ x - 2y = \lambda 2y \rightarrow x = 2y + 2y^2 \\ x + y^2 - 1 = 0 \rightarrow 2y + 2y^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \rightarrow 3y^2 + 2y - 1 = 0 \\ \Rightarrow y = -1, \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -1 \\ \lambda = -1 \\ x = 1 - y^2 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ \lambda = \frac{1}{3} \\ x = 1 - y^2 = \frac{8}{9} \end{cases}$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

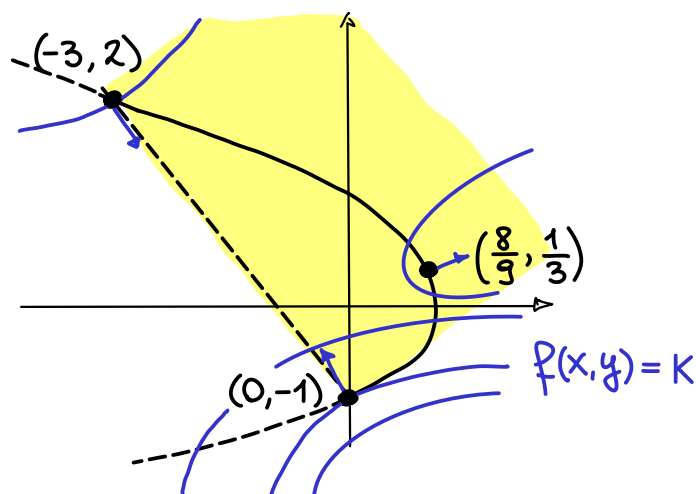
$(0, -1) \in \Gamma \quad \left(\frac{8}{9}, \frac{1}{3}\right) \in \Gamma$

Per il teorema di Weierstrass f ammette punti di max/min assoluti in Γ . Per trovarli confrontiamo i valori di f nei punti stazionari vincolati a $g=0$ appartenenti a Γ e i punti estremi di Γ ossia $(0, -1)$ e $(-3, 2)$:

$$\begin{aligned} f(0, -1) &= -1 \\ f(-3, 2) &= -10 \\ f\left(\frac{8}{9}, \frac{1}{3}\right) &= \frac{5}{27} \end{aligned}$$

 $\Rightarrow$

$\left(\frac{8}{9}, \frac{1}{3}\right)$ è un punto di max assoluto
 $(-3, 2)$ è un punto di min assoluto



OSSERVAZIONE

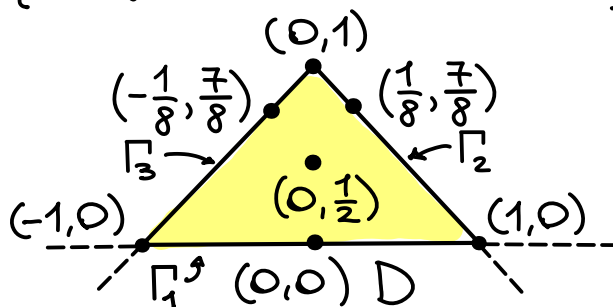
I punti di massimo/minimo assoluto di una funzione continua f in un insieme compatto D la cui esistenza è garantita dal teorema di Weierstrass, vanno individuati tra:

- 1) i punti di D dove f non è differenziabile;
- 2) i punti interni di D dove f è differenziabile che sono stazionari,
- 3) i punti di ∂D .

Se in ∂D si usa il metodo dei moltiplicatori è necessario individuare i punti non regolari e punti stazionari vincolati.

ESEMPI

- Determinare max/min assoluti di $f(x,y) = 3x^2 + y^2 - y$ in $D = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1, y \geq 0\}$



D è compatto
e $f \in C^2(D)$

Punti stazionari:

$$\nabla f(x,y) = (6x, 2y-1) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0, \frac{1}{2})$$

$$(0, \frac{1}{2}) \text{ è interno a } D \text{ e } \boxed{f(0, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}}$$

Bordo: $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ dove

$$\Gamma_1 = \{(x,y) : y=0, x \in [-1,1]\}$$

$\underset{g_1(x,y)}{f_1(x,y)}$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : x + \overset{g_2(x, y)}{y} - 1 = 0, y \in [0, 1]\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) : x - \underset{g_3(x, y)}{y} + 1 = 0, y \in [0, 1]\}$$

I punti non regolari di ∂D sono $(-1, 0), (1, 0), (0, 1)$ e

$$\boxed{f(-1, 0) = 3, f(1, 0) = 3, f(0, 1) = 0}$$

Punti stazionari vincolati: $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g_i & i=1, 2, 3 \\ g_i = 0 \end{cases}$

$$\Gamma_1: \begin{cases} 6x = \lambda \cdot 0 \\ 2y - 1 = \lambda \cdot 1 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases} \in [-1, 1]$$

$$(0, 0) \in \Gamma_1 \text{ e } \boxed{f(0, 0) = 0}$$

$$\Gamma_2: \begin{cases} 6x = \lambda \cdot 1 \\ 2y - 1 = \lambda \cdot 1 \\ x + y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \frac{\lambda}{6} \\ y = \frac{\lambda + 1}{2} \\ \frac{\lambda}{6} + \frac{\lambda + 1}{2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{8} \\ y = \frac{7}{8} \\ \lambda = \frac{3}{4} \end{cases} \in [0, 1]$$

$$\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) \in \Gamma_2 \text{ e } \boxed{f\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) = -\frac{1}{16}}$$

$$\lambda + 3\lambda + 3 = 6$$

$$\Gamma_3: \begin{cases} 6x = \lambda \cdot 1 \\ 2y - 1 = -\lambda \cdot 1 \\ x - y = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \frac{\lambda}{6} \\ y = \frac{-\lambda + 1}{2} \\ \frac{\lambda}{6} - \frac{-\lambda + 1}{2} = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{8} \\ y = \frac{7}{8} \\ \lambda = -\frac{3}{4} \end{cases} \in [0, 1]$$

$$\left(-\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) \in \Gamma_3 \text{ e } \boxed{f\left(-\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) = -\frac{1}{16}}$$

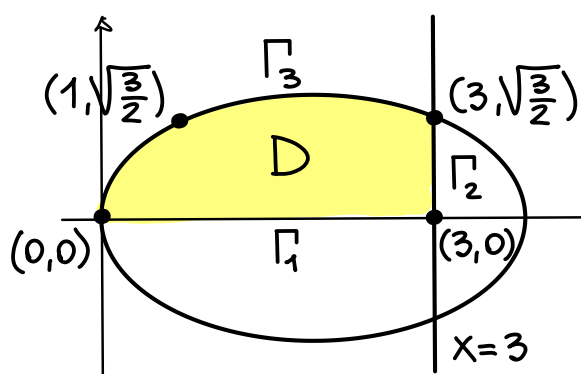
$$\lambda + 3\lambda - 3 = -6$$

Confrontando i valori trovati si conclude che i punti di max assoluto sono $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ con valore 3 e il min assoluto è $(0, \frac{1}{2})$ con valore $-\frac{1}{4}$.

- Determinare max/min assoluti di $f(x,y) = y^2 - x$ in $D = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 - 4x \leq 0, y \geq 0, x \leq 3\}$.

Notiamo che $x^2 + 2y^2 - 4x = (x-2)^2 + 2y^2 - 4 \leq 0$

ossia $\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq 1$ ← insieme compatto con bordo l'ellisse di centro $(2,0)$ e semiasse $2, \sqrt{2}$



D è compatto e $f \in C^2(D)$

$\nabla f(x,y) = (-1, 2y) = (0,0)$ impossibile!

f non ha punti stazionari.

Bordo: $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ dove

$$\Gamma_1 = \{(x,y) : y=0, x \in [0,3]\}$$

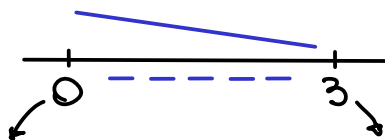
$$\Gamma_2 = \{(x,y) : x=3, y \in [0, \sqrt{3}/2]\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 - 4x = 0, x \in (0,3), y > 0\}$$

$g(x,y)$

Per Γ_1, Γ_2 possiamo restringere f lungo i vincoli:

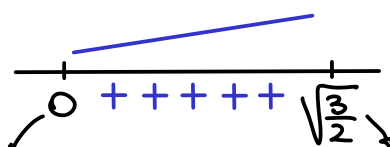
Γ_1 : $f(x,0) = -x, (-x)' = -1$



$$f(0,0) = 0$$

$$f(3,0) = -3$$

Γ_2 : $f(3,y) = y^2 - 3, (y^2 - 3)' = 2y$



$$f(3,0) = -3$$

$$f(3, \sqrt{3}/2) = -\frac{3}{2}$$

Γ_3 : Applichiamo i moltiplicatori

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 = \lambda(2x-4) \\ 2y = \lambda(4y) \rightarrow 2y(1-2\lambda) = 0 \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \\ x^2 + 2y^2 - 4x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ -1 = \lambda(2x-4) \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ -1 = x-2 \rightarrow x=1 \\ x^2 + 2y^2 - 4x = 0 \rightarrow 2y^2 = 3 \end{cases}$$

$\hookrightarrow x=0, x=4$

$$(0,0) \quad \lambda = \frac{1}{4} \qquad (1, \sqrt{\frac{3}{2}}) \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

$$(4,0) \quad \lambda = -\frac{1}{4} \qquad (1, -\sqrt{\frac{3}{2}}) \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

$$(0,0), (4,0) \text{ e } (1, \sqrt{\frac{3}{2}}) \in \Gamma_3, (1, -\sqrt{\frac{3}{2}}) \notin \Gamma_3$$

$$f(1, \sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2}$$

Confrontando i valori trovati si conclude che $(1, \sqrt{\frac{3}{2}})$ è il punto di massimo assoluto con valore $\frac{1}{2}$ e $(3,0)$ è il punto di minimo assoluto con valore -3 .