

ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 13

ALCUNI ESERCIZI DEL FOGLIO 3

1.a $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(xy)}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$ è continua in $\mathbb{R}^2$

Basta verificare che $\forall x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} f(x,y) = f(x_0,0) = 0.$$

Si noti che se $(x,y) \rightarrow (x_0,0)$ allora $xy \rightarrow 0$ e

$$1 - \cos(xy) = \frac{1}{2}(xy)^2 \cdot (1 + o(1))$$

Quindi per $y \neq 0$,

$$f(x,y) = \frac{1 - \cos(y)}{y} = \frac{1}{2} \frac{x^2 y^2}{y} (1 + o(1)) \xrightarrow[y \rightarrow 0]{x \rightarrow x_0} 0.$$

1.b $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ x^3 & \text{se } y = 0 \end{cases}$ è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \neq 0, \pm 1\}$

Basta verificare per quali $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} f(x,y) = f(x_0,0) = x_0^3.$$

Per $(x,y) \rightarrow (x_0,0)$ si ha che $xy \rightarrow 0$

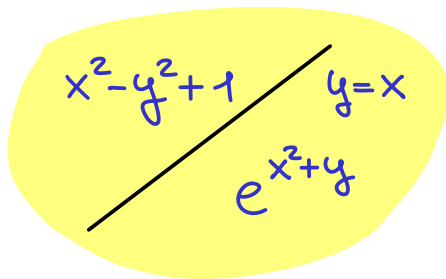
$$\sin(xy) = xy(1 + o(1)).$$

Quindi per $y \neq 0$

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{y} = \frac{xy}{y} (1 + o(1)) \xrightarrow[y \rightarrow 0]{x \rightarrow x_0} x_0$$

e la continuità è verificata nei punti in cui $x_0^3 = x_0$ ossia $x_0 = 0, 1, -1$.

1.c $f(x,y) = \begin{cases} e^{x^2+y} & \text{se } y < x \\ x^2 - y^2 + 1 & \text{se } y \geq x \end{cases}$ è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) : x \neq 0, -1\}$



Dato che $(x,y) \rightarrow e^{x^2+y}$ e $(x,y) \rightarrow x^2 - y^2 + 1$ sono continue in $\mathbb{R}^2$, la continuità di f è verificata in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$

e nei punti lungo la retta $y=x$ tali che $e^{x^2+x} = \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 1 \iff x^2 + x = 0 \iff x = 0, -1.$

2.a $f(x,y) = \arctg(\frac{y}{x})$ Piano tangente in $(1,1)$?

$$f(1,1) = \arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-y/x^2}{1 + (\frac{y}{x})^2}, \frac{1/x}{1 + (\frac{y}{x})^2} \right) \Rightarrow \nabla f(1,1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Piano tangente in $(1,1)$:

$$z = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-1) + \left(\frac{1}{2}\right)(y-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} + \frac{y}{2}.$$

2.b $f(x,y) = \log(\underbrace{|x+y|}_{-x-y \text{ in un intorno di } (-2,1)} + y^2)$ Piano tangente in $(-2,1)$?

$$f(-2,1) = \log(1-1+1) = \log(2)$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-1}{-x-y+y^2}, \frac{-1+2y}{-x-y+y^2} \right) \Rightarrow \nabla f(-2,1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Piano tangente in $(-2,1)$:

$$z = \log(2) - \frac{1}{2}(x+2) + \frac{1}{2}(y-1) = \log(2) - \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}.$$

3.a $f(x,y) = (1+x+y^2)^3$ T_2 in $(0,0)$?

Ricordiamo che $x^\alpha y^\beta = O(x^2+y^2)$ se $\alpha+\beta > 2$.

Allora

$$\begin{aligned} (1+(x+y^2))^3 &= 1+3(x+y^2)+3(x+y^2)^2+(x+y^2)^3 \\ &= 1+3x+3x^2+3y^2+O(x^2+y^2) \end{aligned}$$

e per l'unicità di T_2 ,

$$T_2(x,y) = 1+3x+3x^2+3y^2. \quad \begin{aligned} \nabla &= (3, 0) \\ H &= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.b $f(x,y) = \frac{e^{xy}}{(1-x)(1-2y)}$ T_2 in $(0,0)$?

$$\begin{aligned} \frac{e^{xy}}{(1-x)(1-2y)} &= (1+xy+O(x^2+y^2)) \cdot (1+x+x^2+O(x^2+y^2)) \\ &\quad \cdot (1+2y+4y^2+O(x^2+y^2)) \\ &= (1+xy+O(x^2+y^2)) \cdot (1+x+2y+x^2+2xy+4y^2+O(x^2+y^2)) \\ &= 1+x+2y+x^2+3xy+4y^2+O(x^2+y^2). \end{aligned}$$

Quindi

$$T_2(x,y) = 1+x+2y+x^2+3xy+4y^2. \quad \begin{aligned} \nabla &= (1, 2) \\ H &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.a $f(x,y)=x^3-y^3-3x+12y+2$ Punti stazionari?

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2) \quad \nabla f(x,y) = (3x^2-3, -3y^2+12) = (0,0)$$

$$\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 2 \end{cases}$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} (1,2), (1,-2) \\ (-1,2), (-1,-2) \end{matrix}$$

Punti stazionari

Quindi:

$$(1,2): \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \text{ SELLA}$$

$$(-1,2): \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \text{ MASSIMO RELATIVO}$$

$$(1,-2): \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \text{ MINIMO RELATIVO}$$

$$(-1,-2): \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \text{ SELLA}$$

Non ci sono max/min assoluti:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3-3x+2) = \pm\infty.$$

4.b $f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2}$ Punti stazionari?

$D=\mathbb{R}^2$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, f non è derivabile in $(0,0)$

Per $(x,y) \neq (0,0)$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\overset{4}{8}x}{2\sqrt{4x^2+y^2}}, \frac{\overset{2}{2}y}{2\sqrt{4x^2+y^2}} \right) = (0,0)$$

Non ci sono punti stazionari!

$(0,0)$ è un punto di minimo assoluto:

$$f(x,y) = \sqrt{4x^2+y^2} \geq 0 = f(0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

4.e $f(x,y) = (x^2 - y - 1)(1 - x^2 - y^2)$ Punti stazionari?
 $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ $= 2x^2 - x^4 - x^2y^2 - y + yx^2 + y^3 - 1 + y^2$

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 4x - 4x^3 - 2xy^2 + 2xy = 2x(2 - 2x^2 - y^2 + y) = 0 \\ f'_y(x,y) = -2x^2y - 1 + x^2 + 3y^2 + 2y = x^2(1 - 2y) + 3y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 3y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x^2 = 2 - y^2 + y \\ (2 - y^2 + y)(1 - 2y) + 6y^2 + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

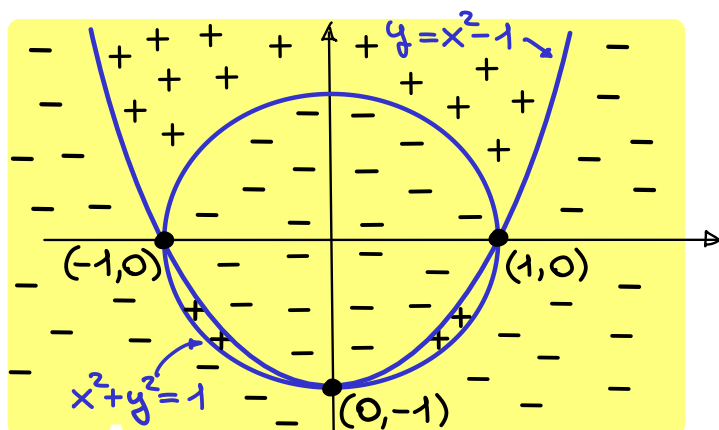
$$(3y-1)(y+1) = 0 \quad \begin{aligned} &2 - y^2 + y - 4y + 2y^3 - 2y^2 + 6y^2 + 4y - 2 = 0 \\ &2y^3 + 3y^2 + y = 0 \\ &y(2y^2 + 3y + 1) = 0 \quad y = 0, -1, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0, \frac{1}{3} \\ 0, -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 2x^2=2 \end{cases} \cup \begin{cases} y=1 \\ 2x^2=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=-\frac{1}{2} \\ 2x^2=\frac{5}{4} \end{cases}$$

$(1, 0)$	~~$(0, -1)$~~	$(\sqrt{\frac{5}{8}}, -\frac{1}{2})$
$(-1, 0)$	già presente	$(-\sqrt{\frac{5}{8}}, -\frac{1}{2})$

Esaminando il segno di f si trova che



i punti stazionari $(1, 0)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$ dove la funzione vale 0 sono tutti punti di SELLA.

Per $(0, \frac{1}{3})$ e $(\pm\sqrt{\frac{5}{8}}, -\frac{1}{2})$ calcoliamo la matrice Hessiana

$$f_{xx}(x,y) = 4 - 12x^2 - 2y^2 + 2y$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -4xy + 2x$$

$$f_{yy}(x,y) = -2x^2 + 6y + 2$$

Così

$$H_f(0, \frac{1}{3}) = \begin{bmatrix} \frac{40}{9} & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (0, \frac{1}{3}) \text{ MINIMO RELATIVO}$$

$$H_f(\pm\sqrt{\frac{5}{8}}, -\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} -5 & \pm\sqrt{10} \\ \pm\sqrt{10} & -\frac{9}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow t_2(H) < 0, \det(H) = \frac{5}{4} > 0$$

$(\pm\sqrt{\frac{5}{8}}, -\frac{1}{2})$ MASSIMO RELATIVO

5.a $f(x,y) = (x-y)^4 - 8(x-y)^2$ Che tipo di punto è $(0,0)$?

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2), f(x,y) = -8(x-y)^2 + o(x^2+y^2)$$

da cui $= -8x^2 + 16xy - 8y^2 + o(x^2+y^2)$

$$f(0,0) = 0, \nabla f(0,0) = (0,0), H_f(0,0) = 16 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \det(H) = 0$$

Abbiamo che

$$f(x,y) = \underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0} \underbrace{((x-y)^2 - 8)}_{\rightarrow -8 \text{ per } (x,y) \rightarrow (0,0)} \leq 0 = f(0,0) \text{ in un intorno di } (0,0)$$

quindi è < 0 in un intorno di $(0,0)$

Quindi $(0,0)$ è un punto di MASSIMO RELATIVO

Segno di f

