

ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 12

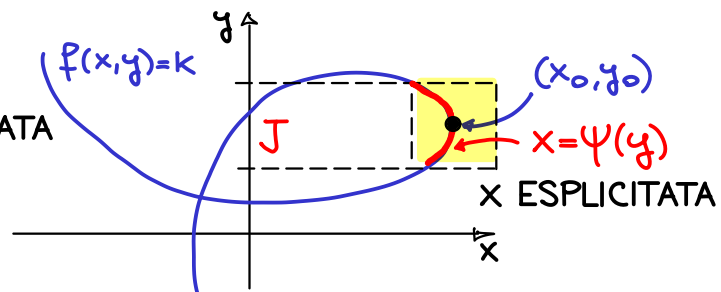
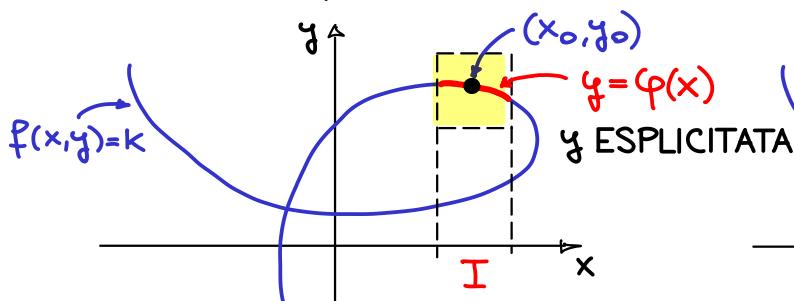
FUNZIONI DEFINITE IMPLICITAMENTE

Generalmente data una funzione $f(x,y)$, l'equazione $f(x,y)=k$ con $k \in \mathbb{R}$ è soddisfatta dai punti lungo una curva (di livello) contenuta in D .

Fissato un punto (x_0, y_0) di tale curva, in certe ipotesi, l'equazione $f(x,y)=k$ definisce IMPLICITAMENTE una funzione $y=\varphi(x)$ in un intorno I di x_0 oppure una funzione $x=\psi(y)$ in un intorno J di y_0 tali che, rispettivamente

$$\forall x \in I \quad f(x, \varphi(x)) = k$$

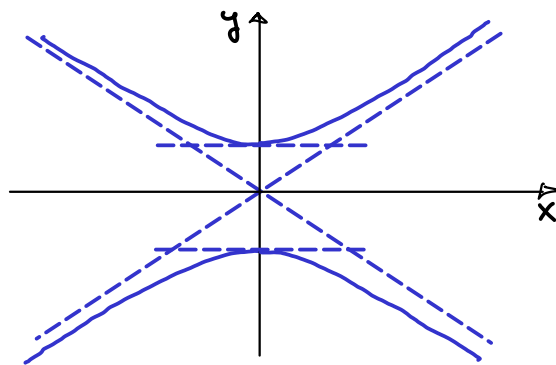
$$\forall y \in J \quad f(\psi(y), y) = k$$



ESEMPIO

- $f(x,y) = y^2 - x^2 = 1$

$$\nabla f(x,y) = (-2x, 2y)$$



Esplicito la x : $x^2 = y^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y^2 - 1} & \text{per } x_0 > 0 \text{ e } |y_0| > 1 \\ x = -\sqrt{y^2 - 1} & \text{per } x_0 < 0 \text{ e } |y_0| > 1 \end{cases}$

tangente orizzontale

$f_x(0, \pm 1) = 0 \Rightarrow$ Non si può esplicitare la x in un intorno di $(0, \pm 1)$

Esplicito la y : $y^2 = x^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x^2 + 1} & \text{per } x_0 \in \mathbb{R} \text{ e } y_0 \geq 1 \\ y = -\sqrt{x^2 + 1} & \text{per } x_0 \in \mathbb{R} \text{ e } y_0 \leq -1 \end{cases}$

tangente mai verticale

$f_y(x,y) = 2y \neq 0$ lungo tutta la curva.

TEOREMA (DELLE FUNZIONI IMPLICITE O DI DINI)

Sia $f \in C^1(A)$ con A insieme aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sia $(\bar{x}_0, y_0) \in A$ tale che $f(\bar{x}_0, y_0) = 0$.

Se $f_y(\bar{x}_0, y_0) \neq 0$ allora $\exists r, s > 0$ e $\exists$ un'unica funzione

$$\varphi: B_r(\bar{x}_0) \rightarrow (y_0 - s, y_0 + s)$$

tale che $\varphi(\bar{x}_0) = y_0$ e

$$f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0 \quad \forall \bar{x} \in B_r(\bar{x}_0).$$

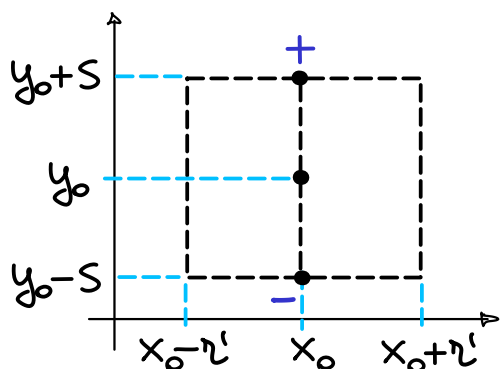
Inoltre $\varphi \in C^1(B_r(\bar{x}_0))$ e per $j = 1, \dots, n$

$$\varphi_{x_j}(\bar{x}) = - \frac{f_{x_j}(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))}{f_y(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))} \quad \forall \bar{x} \in B_r(\bar{x}_0).$$

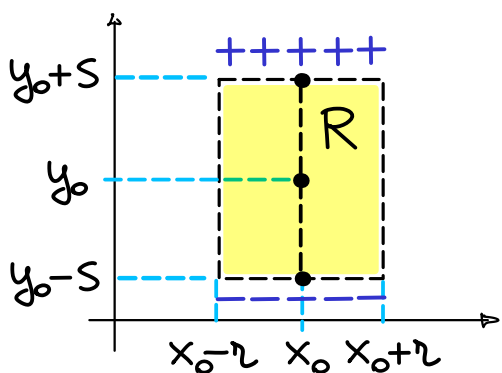
dim. caso $n=1$. Possiamo supporre che $f_y(x_0, y_0) > 0$.

1) Esistenza di φ .

Per la permanenza del segno e la continuità di f_y in (x_0, y_0) $\exists r', s > 0$ tali che $f_y(x, y) > 0$ in $[x_0 - r', x_0 + r'] \times [y_0 - s, y_0 + s]$.

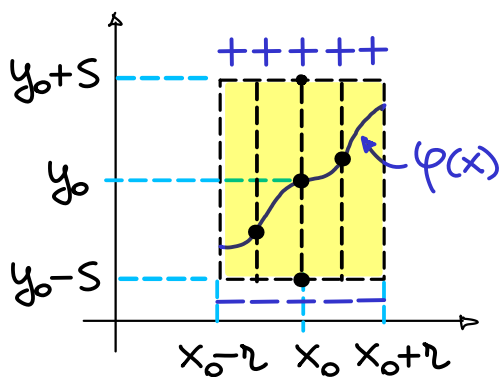


Quindi la funzione $y \rightarrow f(x_0, y)$ è strettamente crescente in $[y_0 - s, y_0 + s]$. Siccome $f(x_0, y_0) = 0$ si ha che $f(x_0, y_0 + s) > 0$ e $f(x_0, y_0 - s) < 0$.



Per la permanenza del segno e la continuità di f in $(x_0, y_0 + s)$ e $(x_0, y_0 - s)$ $\exists r' \in (0, r)$ tale che $f(x, y_0 + s) > 0$ e $f(x, y_0 - s) < 0$ $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$.

Sia $R = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - s, y_0 + s]$



Così $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ la funzione $y \rightarrow f(x, y)$ è strettamente crescente e continua in $[y_0 - S, y_0 + S]$. Allora per il teorema degli zeri (il segno dei valori agli estremi è discorde)
 $\exists$ un unico $y = \varphi(x)$ tale che $f(x, \varphi(x)) = 0$. Si noti che $\varphi(x_0) = y_0$.

2) Continuità di φ .

Sia $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ e sia h tale che $x + h \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

Per il teorema del valor medio $\exists (x_*, y_*)$ lungo il segmento di estremi $(x, \varphi(x)), (x+h, \varphi(x+h)) \in R$ tale che

$$0 = f(x+h, \varphi(x+h)) - f(x, \varphi(x))$$

$$\stackrel{\text{TVM}}{=} f_x(x_*, y_*) h + \overbrace{f_y(x_*, y_*)}^{>0} (\varphi(x+h) - \varphi(x))$$

da cui

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = - \frac{f_x(x_*, y_*)}{f_y(x_*, y_*)} \cdot h \quad (*)$$

Per $h \rightarrow 0$,

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq \frac{\max_R |f_x(x_*, y_*)|}{\min_R |f_y(x_*, y_*)|} \cdot |h| \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \text{ è continua}$$

$\max_R |f_x(x_*, y_*)|$ e $\min_R |f_y(x_*, y_*)| > 0$ esistono per il teo. di Weierstrass dato che $f_x, f_y \in C(R)$ e R è compatto.

3) φ è C^1 e vale la formula data.

Per (*), se $h \rightarrow 0$ si ha che $x_* \rightarrow x$, $y_* \rightarrow \varphi(x)$ e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \stackrel{(*)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} - \frac{f_x(x_*, y_*)}{f_y(x_*, y_*)} = \left(- \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} \right)$$

$\varphi'(x)$ Continua per la ↑

continuità di f_x, f_y e φ



OSSERVAZIONE

Si dimostra che se $f \in C^k(A)$ con $k \geq 1$ allora $\varphi \in C^k(B_r(\bar{x}_0))$.

ESEMPI

- L'equazione $f(x,y) = 3x^2 + y^2 - 7 = 0$ è soddisfatta per $(x_0, y_0) = (1, 2)$. Il gradiente è

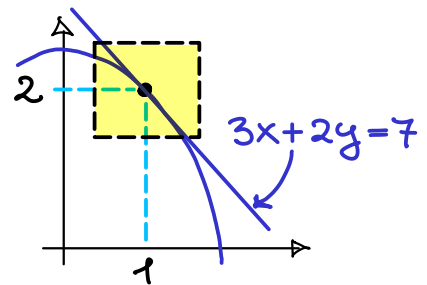
$$\nabla f(x,y) = (6x, 2y).$$

Dato che $f_y(1,2) = 4 \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce in un intorno di $x=1$ una funzione $y = \varphi(x)$ tale che $\varphi(1) = 2$, $f(x, \varphi(x)) = 0$ e

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} = -\frac{6x}{2\varphi(x)} \Rightarrow \varphi'(1) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

La retta tangente a $3x^2 + y^2 - 7 = 0$ in $(1,2)$ è

$$\begin{aligned} y &= \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) \\ &= 2 - \frac{3}{2}(x-1) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \\ &\Rightarrow 3x + 2y = 7 \end{aligned}$$



Dato che $f_x(1,2) = 6 \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce in un intorno di $y=2$ una funzione $x = \psi(y)$ tale che $\psi(2) = 1$, $f(\psi(y), y) = 0$ e

$$\psi'(y) = -\frac{f_y(\psi(y), y)}{f_x(\psi(y), y)} = -\frac{2y}{6\psi(y)} \Rightarrow \psi'(2) = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

La retta tangente a $3x^2 + y^2 - 7 = 0$ in $(1,2)$ è $x = \psi(2) + \psi'(2)(y-2) = 1 - \frac{2}{3}(y-2) \Rightarrow 3x + 2y = 7$.

- L'equazione

$$f(x,y) = e^{xy} + 2x + 3y - 1 = 0$$

vale per $(x,y) = (0,0)$. Gradiente:

$$\nabla f(x,y) = (ye^{xy} + 2, xe^{xy} + 3).$$

Dato che $f_y(0,0) = 3 \neq 0$, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce in un intorno di $x=0$ una funzione $y = \varphi(x)$ tale che $\varphi(0) = 0$, $f(x, \varphi(x)) = 0$ e

$$\varphi'(x) = - \frac{\varphi(x)e^{x\varphi(x)} + 2}{xe^{x\varphi(x)} + 3} \Rightarrow \varphi'(0) = -\frac{2}{3}.$$

Calcolo di $\varphi''(x)$:

$$\frac{f_x(x, \varphi(x))}{(\varphi(x)e^{x\varphi(x)} + 2)} + \frac{f_y(x, \varphi(x))}{(xe^{x\varphi(x)} + 3)} \cdot \varphi'(x) = 0$$

$\frac{d}{dx} f(x, \varphi(x)) = 0$

allora derivando rispetto a x si ha

$$\begin{aligned} & \varphi'(x)e^{x\varphi(x)} + \varphi(x)e^{x\varphi(x)}(\varphi(x) + x\varphi'(x)) \\ & + (e^{x\varphi(x)} + xe^{x\varphi(x)}(\varphi(x) + x\varphi'(x))) \cdot \varphi'(x) \\ & + (xe^{x\varphi(x)} + 3)\varphi''(x) = 0 \end{aligned}$$

e quindi per $x=0$ si ottiene

$$-\frac{2}{3} + 0 + (1+0) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 3\varphi''(0) = 0 \Rightarrow \varphi''(0) = \frac{4}{9}.$$

Anche senza scrivere esplicitamente φ , abbiamo calcolato il polinomio di Taylor T_2 di φ in 0:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 \\ &= 0 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}x^2. \end{aligned}$$

- L'equazione

$$f(x, y, z) = e^z - z^2 - x^3 - y^3 = 0 \quad \text{superficie di livello}$$

vale per $(x, y, z) = (1, 0, 0)$. Gradiente:

$$\nabla f(x, y, z) = (-3x^2, -3y^2, e^z - 2z)$$

e quindi $\nabla f(1, 0, 0) = (-3, 0, 1)$.

Visto che $f_x(1, 0, 0) = -3 \neq 0$ e $f_z(1, 0, 0) = 1 \neq 0$

è possibile esplicitare localmente vicino a $(1, 0, 0)$ sia la x che la z .

Esplicitiamo la z : in un intorno U di $(1, 0)$

$\exists z = \varphi(x, y)$ tale che $\varphi(1, 0) = 0$ e

$$\forall (x, y) \in U \quad f(x, y, \varphi(x, y)) = 0.$$

Inoltre

$$\varphi_x(1, 0) = -\frac{f_x(1, 0, 0)}{f_z(1, 0, 0)} = 3, \quad \varphi_y(1, 0) = -\frac{f_y(1, 0, 0)}{f_z(1, 0, 0)} = 0.$$

Quindi per $(x, y) \rightarrow (1, 0)$,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi(1, 0) + \varphi_x(1, 0)(x-1) + \varphi_y(1, 0)y + o(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}) \\ &= 3(x-1) + o(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}). \end{aligned}$$

Si noti che $z = 3(x-1)$ è il piano tangente alla superficie di livello

$$e^z - z^2 - x^3 - y^3 = 0$$

nel punto $(1, 0, 0)$.