

ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 11

FORME QUADRATICHE

Sia M una matrice $n \times n$ simmetrica reale.

La funzione $\mathbb{R}^n \ni \vec{v} \rightarrow \langle M\vec{v}, \vec{v} \rangle \in \mathbb{R}$
si dice FORMA QUADRATICA associata a M .

M si dice DEFINITA POSITIVA se

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \quad \langle M\vec{v}, \vec{v} \rangle > 0.$$

M si dice DEFINITA NEGATIVA se

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \quad \langle M\vec{v}, \vec{v} \rangle < 0.$$

M si dice INDEFINITA se

$$\exists \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} : \langle M\vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle > 0 \text{ e } \langle M\vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle < 0.$$

TEOREMA

Sia M una matrice $n \times n$ simmetrica reale e
siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ i suoi autovalori ripetuti
con le loro molteplicità, allora

- 1) M è definita positiva $\Leftrightarrow \lambda_j > 0$ per $j=1, \dots, n$
- 2) M è definita negativa $\Leftrightarrow \lambda_j < 0$ per $j=1, \dots, n$
- 3) M è indefinita $\Leftrightarrow \exists \lambda_i, \lambda_j : \lambda_i > 0$ e $\lambda_j < 0$

dim. Dimostriamo solo 1).

M è simmetrica e dunque $\exists$ una base ortonormale
di autovettori $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ tali che $M\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j$ $j=1, \dots, n$.

($\Rightarrow$) Per $j=1, \dots, n$,

$$0 < \langle M\vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle = \langle \lambda_j \vec{v}_j, \vec{v}_j \rangle = \lambda_j \underbrace{\|\vec{v}_j\|^2}_{=1} = \lambda_j.$$

Quindi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono positivi.

($\Leftarrow$) Se $\vec{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\vec{0}\} \exists \alpha_j \in \mathbb{R} \ j=1, \dots, m$ non tutti nulli
 tali che

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \vec{v}_j$$

allora

$$\begin{aligned} \langle M\vec{v}, \vec{v} \rangle &= \langle M \sum_{j=1}^m \alpha_j \vec{v}_j, \sum_{k=1}^m \alpha_k \vec{v}_k \rangle \\ \text{linearità} \rightarrow &= \langle \sum_{j=1}^m \alpha_j M \vec{v}_j, \sum_{k=1}^m \alpha_k \vec{v}_k \rangle \\ M\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j \rightarrow &= \langle \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j \vec{v}_j, \sum_{k=1}^m \alpha_k \vec{v}_k \rangle \\ \text{bilinearità} \rightarrow &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \alpha_k \lambda_j \underbrace{\langle \vec{v}_j, \vec{v}_k \rangle}_{\text{ortonormalità}} = \begin{cases} 1 & \text{se } j=k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases} \\ &= \sum_{j=1}^m \underbrace{\alpha_j^2}_{\geq 0} \underbrace{\lambda_j}_{> 0} \leftarrow \text{almeno uno degli } \alpha_j^2 > 0 \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE

Nel caso $m=2$, con $M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ gli autovalori λ_1, λ_2 si trovano risolvendo l'equazione caratteristica

$$0 = \det(M - \lambda I) = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - \overbrace{(a+c)}^{\text{TRACCIA } \text{tr}(M)} \lambda + \overbrace{ac-b^2}^{\det(M)}.$$

Dato che $\text{tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2$ e $\det(M) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ il segno di λ_1, λ_2 si può ottenere anche senza calcolare esplicitamente λ_1 e λ_2 :

$$M \text{ è definita positiva} \iff \begin{cases} \det(M) > 0 \\ \text{tr}(M) > 0 \end{cases}$$

$$M \text{ è definita negativa} \iff \begin{cases} \det(M) > 0 \\ \text{tr}(M) < 0 \end{cases}$$

$$M \text{ è indefinita} \iff \det(M) < 0$$

Le seguente enunciazione fornisce una condizione sufficiente per riconoscere se un punto stazionario interno è un punto di massimo/minimo/sella.

TEOREMA

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $\vec{x}_0$ punto interno di D .
Se f è C^2 in un intorno di $\vec{x}_0$ e $\vec{x}_0$ è un punto stazionario di f allora

- 1) $H_f(\vec{x}_0)$ è definita positiva $\Rightarrow \vec{x}_0$ è un punto di minimo relativo
 - 2) $H_f(\vec{x}_0)$ è definita negativa $\Rightarrow \vec{x}_0$ è un punto di massimo relativo
 - 3) $H_f(\vec{x}_0)$ è indefinita $\Rightarrow \vec{x}_0$ è un punto di sella
- dim. Dimostriamo solo 1).

Per la formula di Taylor di ordine 2 per $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$

$$f(\vec{x}) = T_{2, \vec{x}_0}(\vec{x}) + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2)$$

dove

$$T_{2, \vec{x}_0}(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \underbrace{\langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle}_{=0} + \frac{1}{2} \langle H_f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle$$

e quindi

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \left(\frac{1}{2} \langle H_f(\vec{x}_0) \vec{v}, \vec{v} \rangle + o(1) \right) \quad (*)$$

dove $\vec{v} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}$ ha norma 1.

Consideriamo la forma quadratiche

$$\vec{v} \mapsto \langle H_f(\vec{x}_0) \vec{v}, \vec{v} \rangle.$$

simmetrica per Schwarz

φ è continua e positiva nel compatto

$$S = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{v}\| = 1\} \quad \text{sfera unitaria in } \mathbb{R}^m \text{ centrata in } \vec{0}$$

e per il teorema di Weierstrass

$$\min_{\vec{v} \in S} \varphi(\vec{v}) = m > 0 \quad \varphi \text{ è definita positiva}$$

Così da (*)

$$f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0) + \|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2 \left(\underbrace{\frac{m}{2}}_{>0} + \underbrace{O(1)}_{\text{per } \vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \right) \geq f(\vec{x}_0)$$

per la permanenza del segno

$$\exists \lambda > 0 : \forall \vec{x} \in B_\lambda(\vec{x}_0) \quad \left(\frac{m}{2} + O(1) \right) > 0$$

ossia $\vec{x}_0$ è un punto minimo relativo. □

OSSERVAZIONE

Se $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ e $\det H_f(\vec{x}_0) = 0$ è necessaria una ulteriore analisi per determinare la natura del punto stazionario $\vec{x}_0$.

ESEMPI

- $f(x, y) = (x-1)(x^2 - y^2) = x^3 - x^2 + y^2 - xy^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Gradienti:

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 2x - y^2, 2y - 2yx).$$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - y^2 = 0 \\ 2y(1-x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ 3x^2 - 2x = 0 \\ x(3x-2)=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=1 \\ 3-2-y^2=0 \\ y^2=1 \end{cases}$$

$\downarrow y=0 \quad \downarrow x=1$ $(0,0), (\frac{2}{3}, 0)$ $(1,1), (1,-1)$

Hessiamo

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x-2 & -2y \\ -2y & 2(1-x) \end{bmatrix}$$

Quindi

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (0,0) \text{ è un punto di sella}$$

$$H_f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}, 0\right) \text{ è un minimo relativo}$$

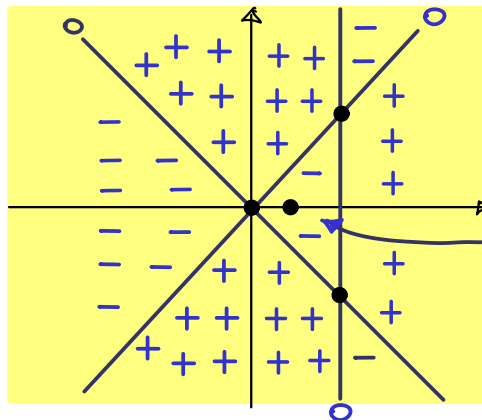
$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (1,1) \text{ è un punto di sella}$$

$$H_f(1,-1) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (1,-1) \text{ è un punto di sella}$$

Qualche ulteriore osservazione.

Seguo di

$$f(x,y) = (x-1)(x^2-y^2)$$



$\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ non è un punto di minimo assoluto

perché restringendo f a $y=0$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - x^2) = \pm\infty \Rightarrow \begin{aligned} \sup_{\mathbb{R}^2} f &= +\infty \\ \inf_{\mathbb{R}^2} f &= -\infty \end{aligned}$$

Invece la funzione $|f(x,y)|$ ha infinite punti di minimo assoluto ossia tutti i punti delle rette $x=1$, $y=\pm x$, un massimo relativo in $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ e nessun massimo assoluto.

- $f(x,y) = x^2 + y^m \in C^2(\mathbb{R}^2)$ con $m \geq 3$.

Gradiente: $\nabla f(x,y) = (2x, my^{m-1}) = (0,0)$

e quindi l'unico punto stazionario è $(0,0)$.

Hessiano:

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(H) = 0 \quad ?$$

Per determinare la natura di $(0,0)$ si nota che per n pari

$$f(x,y) = \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{y^m}_{\geq 0} \geq f(0,0) = 0$$

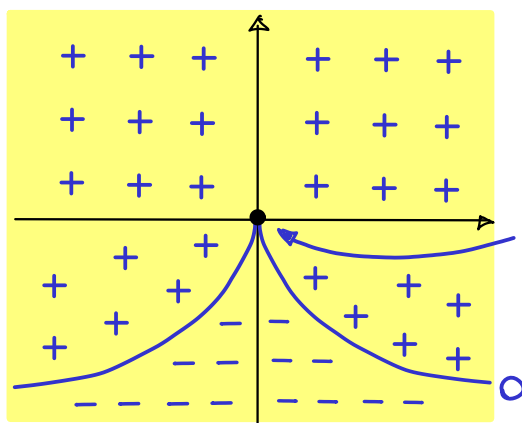
e quindi $(0,0)$ è un punto di minimo assoluto.

Se invece n è dispari

$$f(0,y) = y^m = \begin{cases} > 0 & \text{se } y > 0 \\ < 0 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

e quindi $(0,0)$ è un punto di sella in quanto $f(x,y) - f(0,0) = f(x,y)$ cambia segno in ogni intorno di $(0,0)$:

Segno di
 $f(x,y) = x^2 + y^3$



punto di
sella $(0,0)$