

ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 10

DERIVATE SECONDE

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^m$ e sia $\bar{x}_0$ punto interno di D .
Se f è derivabile in un intorno di $\bar{x}_0$ allora possiamo chiederci se le derivate parziali di f sono a loro volta derivabili. Nel caso lo siamo

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = (f_{x_i})_{x_j} = f_{x_i x_j} \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq m.$$

Si dice DERIVATA PARZIALE SECONDA di f rispetto a x_i e x_j .

Variando gli indici i e j si ottengono m^2 derivate parziali seconde che si possono raccogliere in una matrice $m \times m$ detta HESSIANA di f

$$H_f(\bar{x}_0) = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1}(\bar{x}_0) & f_{x_1 x_2}(\bar{x}_0) & \cdots & f_{x_1 x_m}(\bar{x}_0) \\ f_{x_2 x_1}(\bar{x}_0) & f_{x_2 x_2}(\bar{x}_0) & \cdots & f_{x_2 x_m}(\bar{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_m x_1}(\bar{x}_0) & f_{x_m x_2}(\bar{x}_0) & \cdots & f_{x_m x_m}(\bar{x}_0) \end{bmatrix}$$

In generale le derivate "miste" $f_{x_i x_j}$ e $f_{x_j x_i}$ sono diverse ossia è necessario tenere conto dell'ordine di derivazione.

Per il teorema seguente, se f è sufficientemente regolare allora vale l'uguaglianza e in tal caso la matrice H_f è simmetrica.

TEOREMA (SCHWARZ)

Sia A un insieme aperto $\subseteq \mathbb{R}^m$. Se $f \in C^2(A)$ ossia f è derivabile due volte e tutte le sue derivate parziali prime e seconde sono continue in A allora

$$\forall \bar{x}_0 \in A \quad f_{x_i x_j}(\bar{x}_0) = f_{x_j x_i}(\bar{x}_0) \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq m.$$

ESEMPIO

- Sia $f(x,y) = x^2 e^{3y} \in C^2(\mathbb{R}^2)$ allora le derivate parziali prime sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x e^{3y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 e^{3y}$$

mentre le derivate parziali seconde sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2e^{3y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= 6x e^{3y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= 6x e^{3y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 9x^2 e^{3y} \end{aligned}$$

TEOREMA (FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE 2)

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $\bar{x}_0$ punto interno di D .
Se f è C^2 in un intorno di $\bar{x}_0$ allora per $\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0$

$$f(\bar{x}) = T_{2,\bar{x}_0}(\bar{x}) + o(\|\bar{x} - \bar{x}_0\|^2)$$

dove

$$T_{2,\bar{x}_0}(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) + \langle \nabla f(\bar{x}_0), \bar{x} - \bar{x}_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0), \bar{x} - \bar{x}_0 \rangle$$

è il POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE 2 di f in $\bar{x}_0$.

dim. Sia $r > 0$, $B_r(\bar{x}_0) \subseteq D$ e sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\vec{v}\| = 1$

Consideriamo la funzione

$$(-r, r) \ni t \rightarrow \varphi(t) = f(\bar{x}_0 + t\vec{v})$$

Per le formule di Taylor per funzioni in 1 variabile

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot t + \frac{1}{2} \varphi''(0) t^2 + o(t^2) \quad (*)$$

Ora $\varphi(0) = f(\bar{x}_0)$. Inoltre

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} (f(\bar{x}_0 + t\vec{v})) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0 + t\vec{v}) \cdot v_j$$

Così $\varphi'(0) = \langle \nabla f(\bar{x}_0), \vec{v} \rangle$.

Infine

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= \frac{d}{dt}(\varphi'(t)) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0 + t\bar{v}) \cdot v_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0 + t\bar{v}) \cdot v_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_0 + t\bar{v}) v_j \cdot v_i\end{aligned}$$

Così $\varphi''(0) = \langle H_f(\bar{x}_0) \bar{v}, \bar{v} \rangle$.

Per $\bar{x} \neq \bar{x}_0$ sia $t = \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \in (0, 1)$ e $\bar{v} = \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{t}$. $\|\bar{v}\| = 1$

Sostituendo le espressioni trovate di $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$ in (*) si ha

$$\begin{aligned}f(\bar{x}) &= f(\bar{x}_0) + \langle \nabla f(\bar{x}_0), \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{t} \rangle t \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle H_f(\bar{x}_0) \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{t}, \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{t} \rangle t^2 + o(\|\bar{x} - \bar{x}_0\|^2)\end{aligned}$$

da cui la tesi. $\square$

OSSERVAZIONE

Il polinomio di Taylor $T_{2, \bar{x}_0}(\bar{x})$ è unico:

Se P è un polinomio di 2° grado tale che

$$f(\bar{x}) = P(\bar{x}) + o(\|\bar{x} - \bar{x}_0\|^2) \quad \text{per } \bar{x} \rightarrow \bar{x}_0$$

allora $P(\bar{x}) = T_{2, \bar{x}_0}(\bar{x})$.

ESEMPI

• Sia $f(x, y) = \frac{y}{x}$ e $(x_0, y_0) = (1, 2)$ allora

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x} \right) \Rightarrow \nabla f(1, 2) = (-2, 1) \text{ e}$$

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{2y}{x^3} & -\frac{1}{x^2} \\ -\frac{1}{x^2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(1, 2) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi il polinomio di Taylor di ordine 2
 di $f(x,y) = \frac{y}{x}$ in $(1,2)$ è

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= 2 + \langle (-2,1), (x-1, y-2) \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}, (x-1, y-2) \rangle \\ &= 2 - 2(x-1) + (y-2) + 2(x-1)^2 - (x-1)(y-2). \end{aligned}$$

• Sia $f(x,y) = e^{xy} \cos(x)$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$ allora

$$e^{xy} = 1 + xy + o(xy) \quad \text{e} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

e quindi

$$\begin{aligned} e^{xy} \cos(x) &= (1 + xy + o(xy)) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= 1 + xy - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3 y}{2} + o(xy) + o(x^2) \\ &\quad \text{"} o(xy) \text{ perché } \frac{x^3 y}{xy} \rightarrow 0 \text{ per } (x,y) \rightarrow (0,0) \\ &= 1 + xy - \frac{x^2}{2} + o(x^2 + y^2) \xRightarrow[\text{unicità}]{} T_2(x,y) = 1 + xy - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

perché se $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta \geq 2$ allora

$$\begin{aligned} \frac{o(x^\alpha y^\beta)}{x^2 + y^2} &= \underbrace{\left(\frac{o(x^\alpha y^\beta)}{x^\alpha y^\beta} \right)}_{\rightarrow 0} \cdot \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } (x,y) \rightarrow (0,0) \\ &\quad \text{"} \frac{o(x^\alpha y^\beta)}{x^\alpha y^\beta} \xrightarrow{(\alpha+\beta-2) \geq 0} \cos^\alpha(\theta) \sin^\beta(\theta) \text{"} \text{ limitato} \end{aligned}$$

Con T_2 in $(0,0)$ possiamo ad esempio calcolare

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} \cos(x) - 1}{(x^2 + y^2)^{2/3}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy - \frac{x^2}{2} + o(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{2/3}} = 0.$$

PUNTI DI MASSIMO/MINIMO

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\bar{x}_0 \in D$.

$\bar{x}_0$ si dice PUNTO DI MASSIMO (MINIMO) di f in D se

$$\forall \bar{x} \in D \quad f(\bar{x}) \underset{(\geq)}{\leq} f(\bar{x}_0).$$

$\bar{x}_0$ si dice PUNTO DI MASSIMO (MINIMO) RELATIVO se

$$\exists r > 0 : \forall \bar{x} \in D \cap B_r(\bar{x}_0), \quad f(\bar{x}) \underset{(\geq)}{\leq} f(\bar{x}_0).$$

TEOREMA (FERMAT per $n > 1$)

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\bar{x}_0$ punto interno di D . Se f è differenziabile in $\bar{x}_0$ e $\bar{x}_0$ è un punto di max/min relativo allora $\nabla f(\bar{x}_0) = \vec{0}$ ossia $\bar{x}_0$ è un PUNTO STAZIONARIO di f .

detto anche
PUNTO CRITICO

dim. Vediamo il caso di $\bar{x}_0$ minimo relativo.

Dato che $\bar{x}_0$ è un punto interno di D

$$\exists r > 0 : \forall \bar{x} \in B_r(\bar{x}_0) \subseteq D, \quad f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}_0).$$

Sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\vec{v}\| = 1$ e consideriamo la funzione

$$(-r, r) \ni \varphi(t) \rightarrow f(\bar{x}_0 + t\vec{v})$$

Tale funzione in una variabile ha un punto di minimo relativo in $t = 0 \in (-r, r)$ e per il teorema di Fermat $\varphi'(0) = 0$ da cui

$$0 = \varphi'(0) = \left. \frac{d}{dt} (f(\bar{x}_0 + t\vec{v})) \right|_{t=0} = \langle \nabla f(\bar{x}_0), \vec{v} \rangle.$$

Scegliendo $\vec{v} = \vec{e}_j$ per $j = 1, \dots, n$ si ha che

$$0 = \langle \nabla f(\bar{x}_0), \vec{e}_j \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0)$$

e dunque $\nabla f(\bar{x}_0) = \vec{0}$.



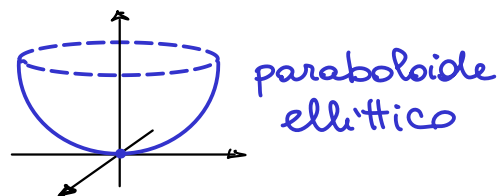
ESEMPI

- I punti stazionari di $f(x,y)=x^2+y^2$ sono:

$$\nabla f(x,y)=(2x,2y) \stackrel{?}{=} (0,0) \Rightarrow (x,y)=(0,0).$$

Dato che

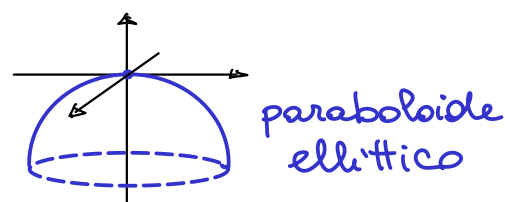
$$f(x,y)=x^2+y^2 \geq f(0,0)=0$$



il punto stazionario $(0,0)$ è un punto di minimo assoluto.

Considerando $g(x,y)=-f(x,y)$ il punto stazionario rimane $(0,0)$ e questa volta il punto è di massimo assoluto:

$$g(x,y)=-x^2-y^2 \leq g(0,0)=0$$

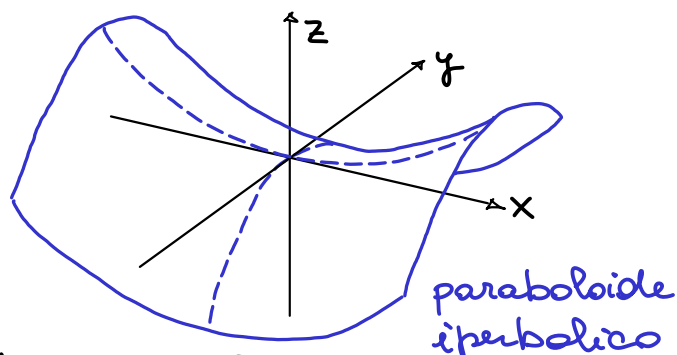
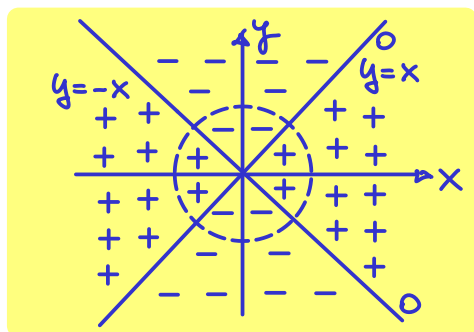


- I punti stazionari di $f(x,y)=x^2-y^2$ sono:

$$\nabla f(x,y)=(2x,-2y) \stackrel{?}{=} (0,0) \Rightarrow (x,y)=(0,0).$$

Notiamo che $f(0,0)=0$ e f assume valori positivi e negativi in ogni intorno di $(0,0)$.

$(0,0)$ non è né un punto di massimo né di minimo



Sia $\bar{x}_0$ un punto interno di D .

$\bar{x}_0$ si dice PUNTO DI SELLA se $\nabla f(\bar{x}_0)=\vec{0}$ e

$\forall r>0 \exists \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in D \cap B_r(\bar{x}_0) : f(\bar{x}_1) < f(\bar{x}_0) \text{ e } f(\bar{x}_2) > f(\bar{x}_0).$