

ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 8

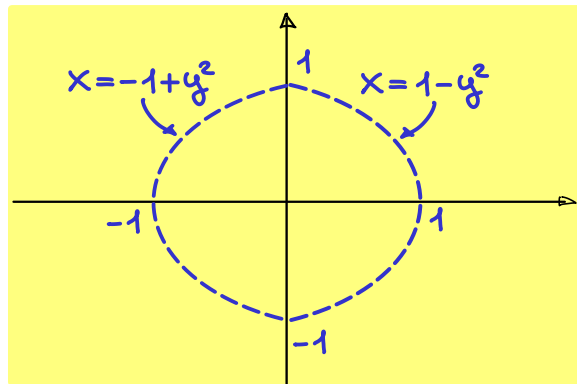
ALCUNI ESERCIZI DEL FOGLIO 2

1.a $f(x,y) = \frac{e^{xy}}{|x|+y^2-1}$ Dominio D?

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+y^2-1 \neq 0\}$$

Notiamo che

$$|x|+y^2-1=0 \iff |x|=1-y^2 \geq 0 \iff \begin{cases} x = \pm(1-y^2) \\ \text{con } |y| \leq 1 \end{cases}$$



parabole

striscie orizzontali

1.b $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2-|x|-|y|}}$ Dominio D?

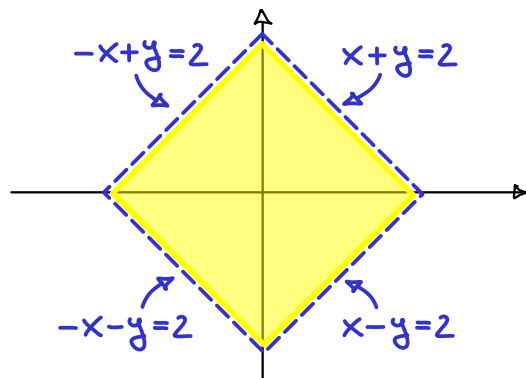
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| < 2\}$$

Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$ $|x|+|y|=2 \iff x+y=2$ retta

Se $x \geq 0$ e $y \leq 0$ $|x|+|y|=2 \iff x-y=2$ retta

Se $x \leq 0$ e $y \geq 0$ $|x|+|y|=2 \iff -x+y=2$ retta

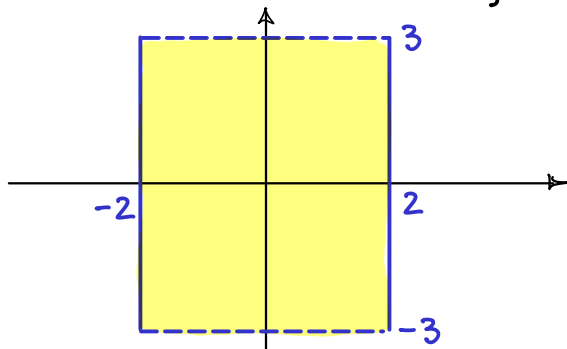
Se $x \leq 0$ e $y \leq 0$ $|x|+|y|=2 \iff -x-y=2$ retta



1.c

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{9-y^2}} \quad \text{Dominio } D?$$

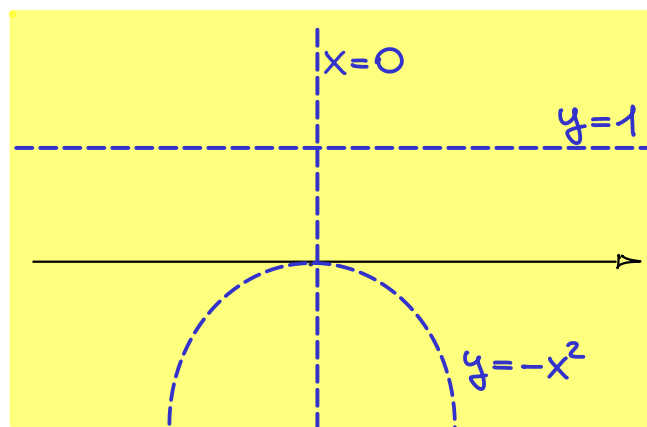
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2 \text{ e } |y| < 3\} = [-2, 2] \times (-3, 3)$$



1.d

$$f(x,y) = \frac{\log|x^3 + \overset{x(x^2+y)}{xy}|}{y-1} \quad \text{Dominio } D?$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ e } x^2 + y \neq 0 \text{ e } y \neq 1\}$$

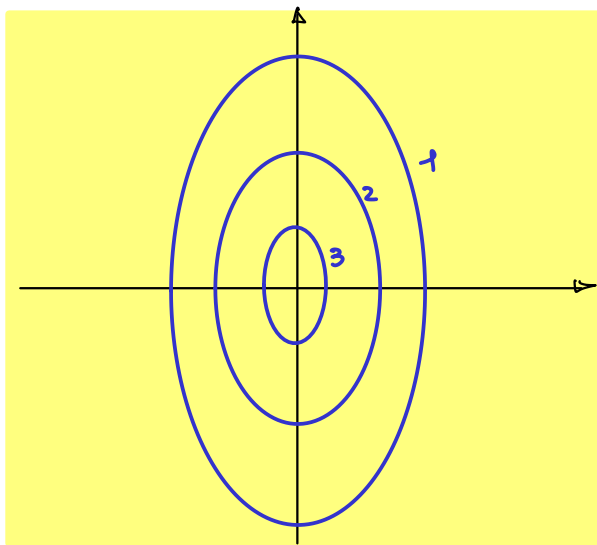


2.a

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + y^2}} \quad \text{Curve di livello?}$$

Per $(x,y) \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2 + y^2}} = k > 0 \iff \frac{1}{k^2} = 4x^2 + y^2 \iff \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2k}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{k}\right)^2} = 1$$



ellisse centrata in $(0,0)$
con semiasse $\frac{1}{2k}$ e $\frac{1}{k}$

Al crescere di k
le ellissi diventano
sempre più piccole

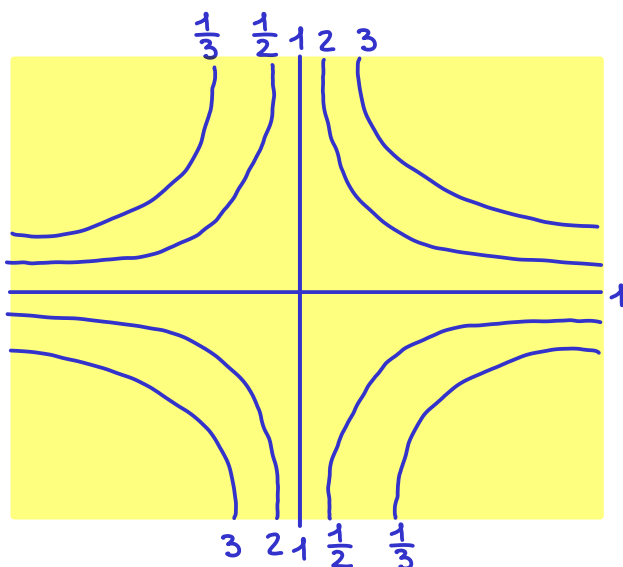
2.b

$$f(x,y) = e^{xy} \quad \text{Curve di livello?}$$

Per $(x,y) \in D = \mathbb{R}^2$

$$e^{xy} = k > 0 \iff y = \log(k) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ oppure } y=0 & \text{se } k=1 \\ y = \frac{\log(k)}{x} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

iperbole



Per $k=1$ c'è la coppia
di rette $x=0$ e $y=0$
Le iperboli stanno
nel 1° e 3° quadrante
per $k>1$ e nel 2° e 4°
quadrante per $0<k<1$.

3.a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|} = 0$

Nel dominio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ se restringiamo f lungo le rette $x=0$ e $y=mx$ otteniamo sempre 0:

$$f(0,y) = \frac{0}{|y|} = 0 \rightarrow 0 \text{ e } f(x, mx) = \frac{mx^2}{|x|(1+|m|)} \rightarrow 0.$$

Quindi se il limite esiste vale 0.

Passando alle coordinate polari $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$

$$|f(x,y)| = \frac{\rho^2 |\cos \theta \sin \theta|}{\rho (|\cos \theta| + |\sin \theta|)} \leq \rho \cdot \frac{1}{m} \rightarrow 0 \text{ per } \rho \rightarrow 0$$

dove

$$m = \min_{\theta \in [0, 2\pi]} (|\cos \theta| + |\sin \theta|) > 0 \quad \text{perché la funzione } \theta \rightarrow |\cos \theta| + |\sin \theta| > 0$$

è continua nel compatto $[0, 2\pi]$

In alternativa si può anche dire che per $(x,y) \rightarrow (0,0)$

$$0 \leq \frac{|xy|}{|x|+|y|} = |x| \cdot \left(\frac{|y|}{|x|+|y|} \right) \leq |x| \rightarrow 0.$$

3.b $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|(1+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \text{non esiste}$

In $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, consideriamo le restrizioni lungo le rette passanti per $(0,0)$:

$$x=0, \quad f(0,y) = \frac{0}{|y|} = 0 \rightarrow 0 \text{ per } (x,y) \rightarrow (0,0)$$

$$y=mx, \quad f(x, mx) = \frac{|x|(1+mx)}{|x|\sqrt{1+m^2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \neq 0.$$

Dato che i due limiti sono diversi si conclude che il limite dato non esiste.

3.c $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \log(1+x^2+2y^2)}{3x^2+y^2} = 0$

In $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, per $(x,y) \rightarrow (0,0)$ si ha che

$$\frac{x \log(1+x^2+2y^2)}{3x^2+y^2} = \left(\frac{\log(1+x^2+2y^2)}{x^2+2y^2} \right) \cdot \left(\frac{x \cdot (x^2+2y^2)}{3x^2+y^2} \right) \rightarrow 0$$

$\xrightarrow{1} \quad \xrightarrow{0}$

perché $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$ e

$$\left| \frac{x \cdot (x^2+2y^2)}{3x^2+y^2} \right| = |x| \cdot \left(\frac{x^2}{3x^2+y^2} \right) + 2|x| \cdot \left(\frac{y^2}{3x^2+y^2} \right) \leq 3|x| \rightarrow 0$$

$\leq 1 \quad \leq 1$

3.d $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2-y^2) \sin\left(\frac{1}{xy^2}\right)}{e^{x+y}-1} = 0$

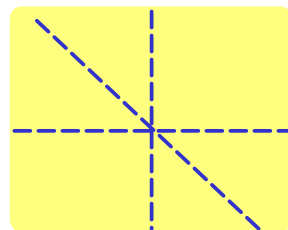
In $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \text{ e } x+y \neq 0\}$

per $(x,y) \rightarrow (0,0)$ si ha che

$$\frac{(x^2-y^2) \sin\left(\frac{1}{xy^2}\right)}{e^{x+y}-1} = \left(\frac{x+y}{e^{x+y}-1} \right) \cdot \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{xy^2}\right) \right) \rightarrow 0$$

$\xrightarrow{1} \quad \quad \quad 1 \cdot 1 \leq 1$

perché $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$



3.g $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{x^4+y^2-2x+3y}{2+\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty$

Notiamo che $\pm x \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ e $\pm y \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$.

Inoltre $(x^2-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^4 \geq 2x^2-1 \geq x^2-1$ e quindi

$$x^4+y^2-2x+3y \geq x^2-1+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}+3\sqrt{x^2+y^2}$$

Infine per $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow +\infty$,

$$\frac{x^4+y^2-2x+3y}{2+\sqrt{x^2+y^2}} \geq \frac{\rho^2-5\rho-1}{2+\rho} \rightarrow +\infty.$$