

ANALISI MATEMATICA 2 - FOGLIO 3

1.a $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(xy)}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$ è continua in $\mathbb{R}^2$

Basta verificare che $\forall x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} f(x,y) = f(x_0,0) = 0.$$

Si noti che se $(x,y) \rightarrow (x_0,0)$ allora $xy \rightarrow 0$ e

$$1 - \cos(xy) = \frac{1}{2}(xy)^2 \cdot (1 + o(1))$$

Quindi per $y \neq 0$,

$$f(x,y) = \frac{1 - \cos(xy)}{y} = \frac{1}{2} \frac{x^2 y^2}{y} (1 + o(1)) \xrightarrow[y \rightarrow 0]{x \rightarrow x_0} 0.$$

1.b $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ x^3 & \text{se } y = 0 \end{cases}$ è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \neq 0, \pm 1\}$

Basta verificare per quali $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} f(x,y) = f(x_0,0) = x_0^3.$$

Per $(x,y) \rightarrow (x_0,0)$ si ha che $xy \rightarrow 0$

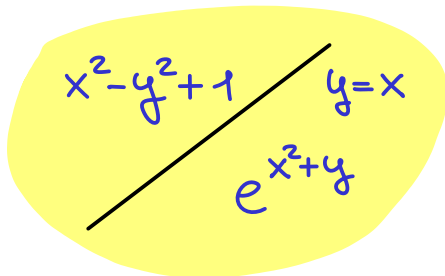
$$\sin(xy) = xy(1 + o(1)).$$

Quindi per $y \neq 0$

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{y} = \frac{xy}{y} (1 + o(1)) \xrightarrow[y \rightarrow 0]{x \rightarrow x_0} x_0$$

e la continuità è verificata nei punti in cui $x_0^3 = x_0$ ossia $x_0 = 0, 1, -1$.

1.c $f(x,y) = \begin{cases} e^{x^2+y} & \text{se } y < x \\ x^2 - y^2 + 1 & \text{se } y \geq x \end{cases}$ è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) : x \neq 0, -1\}$



Dato che $(x,y) \rightarrow e^{x^2+y}$ e $(x,y) \rightarrow x^2 - y^2 + 1$ sono continue in $\mathbb{R}^2$, la continuità di f è verificata in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$

e nei punti lungo la retta $y=x$ tali che $e^{x^2+x} = \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 1 \iff x^2 + x = 0 \iff x = 0, -1.$

1.d $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y \sin(xy)}{(3x^2 + 5y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Si noti che $3x^2 + 5y^2 = 0$ se e solo se $(x,y) = (0,0)$.

La funzione data non è continua in $(0,0)$

perché per $y=x$ con $x \neq 0$, per $x \rightarrow 0$

$$f(x,x) = \frac{x^2 \sin(x^2)}{(8x^2)^2} = \frac{1}{64} \cdot \frac{\sin(x^2)}{x^2} \rightarrow \frac{1}{64} \neq 0.$$

2.a $f(x,y) = \arctg(\frac{y}{x})$ Piano tangente in $(1,1)$?

$$f(1,1) = \arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-y/x^2}{1 + (\frac{y}{x})^2}, \frac{1/x}{1 + (\frac{y}{x})^2} \right) \Rightarrow \nabla f(1,1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Piano tangente in $(1,1)$:

$$z = \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)(x-1) + \left(\frac{1}{2}\right)(y-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} + \frac{y}{2}.$$

2.b $f(x,y) = \log(\underbrace{|x+y|}_{-x-y \text{ in un intorno di } (-2,1)} + y^2)$ Piano tangente in $(-2,1)$?

$$f(-2,1) = \log(|-2+1| + 1) = \log(2)$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-1}{-x-y+y^2}, \frac{-1+2y}{-x-y+y^2} \right) \Rightarrow \nabla f(-2,1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Piano tangente in $(-2,1)$:

$$z = \log(2) - \frac{1}{2}(x+2) + \frac{1}{2}(y-1) = \log(2) - \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}.$$

2.c $f(x,y) = \sqrt{x^2+x-2y}$ Piano tangente in $(2,1)$?

$$f(2,1) = \sqrt{4+2-2} = 2$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2y}}, \frac{-2}{2\sqrt{x^2+x-2y}} \right) \Rightarrow \nabla f(2,1) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2} \right)$$

Piano tangente in $(2,1)$:

$$z = 2 + \frac{5}{4}(x-2) - \frac{1}{2}(y-1) = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}y.$$

2.d $f(x,y) = x^y + y^x$ Piano tangente in $(1,1)$?

$$f(1,1) = 1 + 1 = 2$$

$$\nabla f(x,y) = (y x^{y-1} + y^x \log(y), x^y \log(x) + x y^{x-1})$$

$$\Rightarrow \nabla f(1,1) = (1,1).$$

Piano tangente in $(1,1)$:

$$z = 2 + 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) = x + y.$$

3.a $f(x,y) = (1+x+y^2)^3$ T_2 in $(0,0)$?

Ricordiamo che $x^\alpha y^\beta = O(x^2+y^2)$ se $\alpha+\beta > 2$.

Allora

$$\begin{aligned} (1+(x+y^2))^3 &= 1+3(x+y^2)+3(x+y^2)^2+(x+y^2)^3 \\ &= 1+3x+3x^2+3y^2+O(x^2+y^2) \end{aligned}$$

e per l'unicità di T_2 ,

$$T_2(x,y) = 1+3x+3x^2+3y^2. \quad \begin{aligned} \nabla &= (3, 0) \\ H &= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.b $f(x,y) = \frac{e^{xy}}{(1-x)(1-2y)}$ T_2 in $(0,0)$?

$$\begin{aligned} \frac{e^{xy}}{(1-x)(1-2y)} &= (1+xy+O(x^2+y^2)) \cdot (1+x+x^2+O(x^2+y^2)) \\ &\quad \cdot (1+2y+4y^2+O(x^2+y^2)) \\ &= (1+xy+O(x^2+y^2)) \cdot (1+x+2y+x^2+2xy+4y^2+O(x^2+y^2)) \\ &= 1+x+2y+x^2+3xy+4y^2+O(x^2+y^2). \end{aligned}$$

Quindi:

$$T_2(x,y) = 1+x+2y+x^2+3xy+4y^2. \quad \begin{aligned} \nabla &= (1, 2) \\ H &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.c $f(x,y) = \frac{\sin(\pi xy)}{\pi \sqrt{x}}$ T_2 in $(1,2)$?

Siamo $u=x-1$ e $v=y-2$ allora per $(x,y) \rightarrow (1,2)$ si ha che $(u,v) \rightarrow (0,0)$ e

$$\begin{aligned} \sin(\pi xy) &= \sin(\pi(u+1)(v+2)) = \sin(\pi(uv+2u+v)+2\pi) \\ &= \sin(\pi(uv+2u+v)) \\ &= \pi(uv+2u+v) + O(u^2+v^2). \end{aligned}$$

Inoltre $\frac{1}{\sqrt{x}} = (1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{u}{2} + O(u).$

Così

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{\pi}{\pi}((uv+2u+v)+o(u^2+v^2)) \cdot (1-\frac{u}{2}+o(u)) \\ &= 2u+v+uv-u^2-\frac{uv}{2}+o(u^2+v^2) \\ &= 2u+v-u^2+\frac{uv}{2}+o(u^2+v^2). \end{aligned}$$

Quindi

$$T_2(x,y) = 2(x-1) + (y-2) - (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)(y-2).$$

3.d $f(x,y) = 4 \log\left(\frac{\sqrt{e^x-y}}{\cos(y)}\right)$ T_2 in $(0,0)$?

Per $(x,y) \rightarrow (0,0)$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{4}{2} \log(e^x-y) - 4 \log(\cos(y)) \\ &= 2 \log(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-y) - 4 \log(1-\frac{y^2}{2}+o(y^2)) \\ &= 2\left(x-y+\frac{x^2}{2} - \frac{(x-y+\frac{x^2}{2})^2}{2} + o(x^2+y^2)\right) - 4\left(-\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right) \\ &= 2x-2y + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 2xy - y^2 + 2y^2 + o(x^2+y^2) \\ &= 2x-2y + 2xy + y^2 + o(x^2+y^2) \end{aligned}$$

Quindi

$$T_2(x,y) = 2x - 2y + 2xy + y^2.$$

4.a $f(x,y) = x^3 - y^3 - 3x + 12y + 2$ Punti stazionari?

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2) \quad \nabla f(x,y) = (3x^2 - 3, -3y^2 + 12) = (0,0)$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} (1,2), (1,-2) \\ (-1,2), (-1,-2) \end{matrix}$$

Punti stazionari

Quindi:

$$(1,2): \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \text{ SELLA}$$

$$(-1,2): \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \text{ MASSIMO RELATIVO}$$

$$(1,-2): \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \text{ MINIMO RELATIVO}$$

$$(-1,-2): \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \text{ SELLA}$$

Non ci sono max/min assoluti:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 3x + 2) = \pm\infty.$$

4.b $f(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$ Punti stazionari?

$D = \mathbb{R}^2$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, f non è derivabile in $(0,0)$

Per $(x,y) \neq (0,0)$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\cancel{4}x}{2\sqrt{4x^2+y^2}}, \frac{\cancel{2}y}{2\sqrt{4x^2+y^2}} \right) = (0,0)$$

Non ci sono punti stazionari!

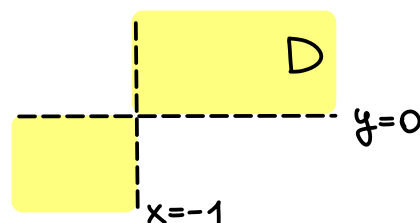
$(0,0)$ è un punto di minimo assoluto:

$$f(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2} \geq 0 = f(0,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

4.c $f(x,y) = x \log(y+yx)$ Punti stazionari?

Dominio: $y+yx = y(1+x) > 0$

$f \in C^2(D)$



$$\nabla f(x,y) = \left(\log(y+yx) + \frac{\overset{=\frac{x}{1+x}}{x \cdot y}}{y+yx}, \frac{\overset{=\frac{x}{y}}{x(1+x)}}{y+yx} \right) = (0,0)$$

$$\begin{cases} \log(y+yx) + \frac{x}{1+x} = 0 \\ \frac{x}{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \log(y) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \boxed{(0,1)} \quad \text{Punti stazionari}$$

Per $x > -1$ e $y > 0$, $\log(y+yx) = \log(y) + \log(1+x)$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(H) = -1$ SELLA

4.d $f(x,y) = \log\left(\frac{x^2}{y}\right) - \frac{x^2}{2} + 1 + y$ Punti stazionari?

Dominio: $\frac{x^2}{y} > 0 \iff x \neq 0, y > 0$

$f \in C^2(D)$



$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\cancel{2x}}{x^2} - x, -\frac{1}{y} + 1 \right) = (0,0)$$

$$\begin{cases} \frac{2-x^2}{x} = 0 \\ -\frac{1}{y} + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 2 \\ y = 1 \end{cases} \iff \boxed{(\sqrt{2}, 1) \quad (-\sqrt{2}, 1)} \quad \text{Punti stazionari}$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{x^2} - 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(\pm\sqrt{2}, 1) = \begin{bmatrix} -2^- & 0 \\ 0 & 1^+ \end{bmatrix} \text{ SELLA}$$

4.e $f(x,y) = (x^2 - y - 1)(1 - x^2 - y^2)$ Punti stazionari?
 $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 4x - 4x^3 - 2xy^2 + 2xy = 2x(2 - 2x^2 - y^2 + y) = 0 \\ f_y(x,y) = -2x^2y - 1 + x^2 + 3y^2 + 2y = x^2(1 - 2y) + 3y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 3y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x^2 = 2 - y^2 + y \\ (2 - y^2 + y)(1 - 2y) + 6y^2 + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$(3y-1)(y+1) = 0 \quad \begin{aligned} &2 - y^2 + y - 4y + 2y^3 - 2y^2 + 6y^2 + 4y - 2 = 0 \\ &2y^3 + 3y^2 + y = 0 \\ &y(2y^2 + 3y + 1) = 0 \quad y = 0, -1, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

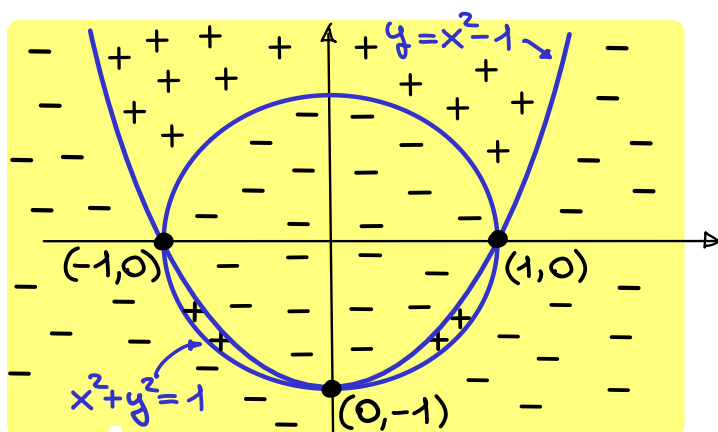
$$\begin{pmatrix} 0, \frac{1}{3} \\ 0, -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 2x^2=2 \end{cases} \cup \begin{cases} y=1 \\ 2x^2=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=-\frac{1}{2} \\ 2x^2=\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \\ -1, 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0, -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{8}}, -\frac{1}{2} \\ -\sqrt{\frac{5}{8}}, -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

già presente

Esaminando il segno di f si trova che



i punti stazionari $(1,0)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$ dove la funzione vale 0 sono tutti punti di SELLA.

Per $(0, \frac{1}{3})$ e $(\pm\sqrt{\frac{5}{8}}, -\frac{1}{2})$ calcoliamo la matrice Hessiana

$$f_{xx}(x,y) = 4 - 12x^2 - 2y^2 + 2y$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -4xy + 2x$$

$$f_{yy}(x,y) = -2x^2 + 6y + 2$$

Così

$$H_f(0, \frac{1}{3}) = \begin{bmatrix} \frac{40^+}{9} & 0 \\ 0 & 4^+ \end{bmatrix} \Rightarrow (0, \frac{1}{3}) \text{ MINIMO RELATIVO}$$

$$H_f(\pm\sqrt{\frac{5}{8}}, -\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} -5 & \pm\sqrt{10} \\ \pm\sqrt{10} & -\frac{9}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow t_2(H) < 0, \det(H) = \frac{5}{4} > 0 \\ (\pm\sqrt{\frac{5}{8}}, -\frac{1}{2}) \text{ MASSIMO RELATIVO}$$

4.8 $f(x,y) = x^4 - xy^2 + y^2$ Punti stazionari?

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2), \quad \nabla f(x,y) = (4x^3 - y^2, -2xy + 2y) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 4x^3 - y^2 = 0 \\ 2y(1-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ 4x^3=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=1 \\ 4=y^2 \end{cases}$$

$\swarrow$ $y=0$ $\swarrow$ $x=1$ $\downarrow$ $x=0$ $\searrow$ $y=\pm 2$

Matrice Hessiana:

$$(0,0) \quad (1,2) \quad (1,-2)$$

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -2y, \quad f_{yy}(x,y) = -2x + 2.$$

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(H) = 0 \quad ?$$

$$f(x,y) = \underbrace{x^4}_{\geq 0} + \underbrace{y^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(1-x)}_{\rightarrow 1 \text{ in } (x,y) \rightarrow (0,0)} \geq 0 = f(0,0) \quad \text{in un intorno di } (0,0)$$

quindi > 0 in un intorno di $(0,0)$

Ne segue che $(0,0)$ è un punto di MINIMO RELATIVO

$$H_f(1, \pm 2) = \begin{bmatrix} 12 & \mp 4 \\ \mp 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(H) = -16 < 0$$

$(1, \pm 2)$ sono punti di SELLA

4.g $f(x,y) = xe^y - ye^x$ Punti stazionari?

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2), \quad \nabla f(x,y) = (e^y - ye^x, xe^y - e^x) = (0,0)$$

$$\begin{cases} e^y - ye^x = 0 \\ xe^y - e^x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y(1 - xy) = 0 \rightarrow xy = 1 \rightarrow y = \frac{1}{x} \\ e^x = xe^y \rightarrow e^x = xe^{\frac{1}{x}} \end{cases}$$

L'equazione $e^x = xe^{\frac{1}{x}}$ ha un'unica soluzione $x=1$.

Infatti $x > 0$ e applicando il logaritmo otteniamo l'equazione equivalente

Per $x > 0$, $h(x) \stackrel{d}{=} x - \log(x) - \frac{1}{x} = 0$.

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2} \quad \begin{array}{c} * \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ + + + + + \end{array}$$

h è strettamente crescente, $h(1) = 0$ e quindi $x=1$ è l'unico zero di h .

L'unico punto stazionario di f è $(1,1)$

Matrice Hessiana:

$$f_{xx}(x,y) = -ye^x, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^y - e^x, \quad f_{yy}(x,y) = xe^y$$

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} -e^- & 0 \\ 0 & e^+ \end{bmatrix} \Rightarrow (1,1) \text{ è un punto di SELLA.}$$

4.h $f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$ Punti stazionari?

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2), \quad \nabla f(x,y) = \left(\frac{1+x^2+y^2-x \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{-x \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \right) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 1-x^2+y^2=0 \\ -2xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1+y^2=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=0 \\ 1-x^2=0 \end{cases}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $x=0 \quad y=0 \quad \emptyset \quad x=\pm 1$

Con i punti stazionari sono

$$(1,0) \quad (-1,0)$$

Matrice Hessiana:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{(1-x^2+y^2)(-2 \cdot 2x)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{(1-x^2+y^2)(-2 \cdot 2y)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{(-2 \cdot xy)(-2 \cdot 2y)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$H_f(1,0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (1,0) \text{ è un punto di MASSIMO RELATIVO}$$

$$H_f(-1,0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (-1,0) \text{ è un punto di MINIMO RELATIVO}$$

4.i $f(x,y) = e^x(2x^2 - xy + y^2)$ Punti stazionari?

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2), \nabla f(x,y) = (e^x(2x^2 - xy + y^2 + 4x - y), e^x(-x + 2y)).$$

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 + 4x - y = 0 \\ x = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} 8y^2 - 2y^2 + y^2 + 8y - y = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

$7y(y+1) = 0$
 $y = 0$ $y = -1$

I punti stazionari sono

$$(0,0) \quad (-2,-1)$$

Matrice Hessiana:

$$f_{xx}(x,y) = e^x(2x^2 - xy + y^2 + 4x - y + 4x - y + 4)$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^x(-x+2y-1)$$

$$f_{yy}(x,y) = 2e^x$$

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad t_2(H) = 8 > 0 \quad \det(H) = 7 > 0 \Rightarrow (0,0) \text{ è un punto di MINIMO RELATIVO}$$

$$H_f(-2,-1) = e^{-2} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \det(H) = -7 \cdot e^{-4} < 0$$

$\Rightarrow (-2,-1)$ è un punto di SELLA.

4.j $f(x,y) = (x^2 + xy)e^{y-x}$ Punti stazionari?

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2), \nabla f(x,y) = ((2x+y-x^2-xy)e^{y-x}, (x+x^2+xy)e^{y-x})$$

$$\begin{cases} 2x+y-x^2-xy=0 \\ x+x^2+xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=-1-x \rightarrow y=-\frac{3}{2} \\ 2x-1-x-x^2+x+x^2=0 \\ \hookrightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$x(1+x+y)=0$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $x=0 \quad y=-1-x$

I punti stazionari sono

$$(0,0) \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

Matrice Hessiana:

$$f_{xx}(x,y) = (2-2x-y-2x-y+x^2+xy)e^{y-x}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = (1-x+2x+y-x^2-xy)e^{y-x}$$

$$f_{yy}(x,y) = (x+x+x^2+xy)e^{y-x}$$

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(H) = -1 < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ è un punto di SELLA}$$

$$H_f\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) = e^{-2} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{tr}(H) = e^{-2} \cdot 3 > 0 \\ \det(H) = e^{-4} > 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ è un punto di MINIMO RELATIVO

4.K $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y)$ Punti stazionari?

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2), \quad \nabla f(x, y) = (\cos(x), \cos(y))$$

$$\begin{cases} \cos(x) = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi & \forall k \in \mathbb{Z} \\ \cos(y) = 0 \rightarrow y = \frac{\pi}{2} + j\pi & \forall j \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ci sono infiniti punti stazionari:

$$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi\right) \quad \forall k, j \in \mathbb{Z}$$

Matrice Hessiana:

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} -\sin(x) & 0 \\ 0 & -\sin(y) \end{bmatrix}$$

Quindi:

1) Se k e j sono pari

$$H_f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{MASSIMO RELATIVO}$$

2) Se k e j sono dispari

$$H_f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{MINIMO RELATIVO}$$

3) Se k è pari e j è dispari

$$H_f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{SELLA}$$

4) Se k è dispari e j è pari

$$H_f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{SELLA}$$

4.8

$$f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x+y)$$

Punti stazionari?

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2), \nabla f(x,y) = (\cos(x) + \cos(x+y), \cos(y) + \cos(x+y))$$

$$\begin{cases} \cos(x) + \cos(x+y) = 0 \\ \cos(y) + \cos(x+y) = 0 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni
otteniamo $\cos(x) = \cos(y)$

da cui $x = y + 2k\pi$ oppure $x = -y + 2k\pi$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

1) $x = y + 2k\pi$

$$\cos(x) + \cos(2x + 2k\pi) = 0$$

$$\cos(x) + \cos(2x) = 0$$

$$\cos(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x) = 0$$

$$\cos(x) + \cos^2(x) - 1 + \cos^2(x) = 0$$

$$2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$$

$$\cos(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{cases} \nearrow \frac{1}{2} & x = \pm \frac{\pi}{3} + 2j\pi \\ \searrow -1 & x = \pi + 2j\pi \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

2) $x = -y + 2k\pi$

$$\cos(x) + \cos(2k\pi) = 0$$

$$\cos(x) = -1 \quad x = \pi + 2j\pi \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Ci sono infiniti punti stazionari:

$$\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2j\pi, \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right), (\pi + 2j\pi, \pi + 2k\pi) \quad \forall k, j \in \mathbb{Z}$$

Matrice Hessiana:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -\sin(x) - \sin(x+y) & -\sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin(y) - \sin(x+y) \end{bmatrix}$$

$$1) H_f\left(\frac{\pi}{3} + 2j\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2(H) = -2\sqrt{3} < 0, \det(H) = \frac{9}{4} > 0$$

$\left(\frac{\pi}{3} + 2j\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$ è un punto di MASSIMO RELATIVO

$$2) H_f\left(-\frac{\pi}{3} + 2j\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2(H) = 2\sqrt{3} > 0, \det(H) = \frac{9}{4} > 0$$

$\left(-\frac{\pi}{3} + 2j\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$ è un punto di MINIMO RELATIVO

$$3) H_f(\pi + 2j\pi, \pi + 2k\pi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ?$$

Visto che la funzione è periodica di periodo 2π sia rispetto a x che a y , basta esaminare il caso $j=k=0$ ossia il punto (π, π) .

Restringendo f lungo $y=x$ abbiamo che

$$f(x, x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$$

$$= 2\sin(x) \underbrace{(1 + \cos(x))}_{\geq 0} \quad \begin{array}{c} ++ \quad -- \\ \pi \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{in un intorno} \\ \text{di } \pi \end{array}$$

Dato che $f(\pi, \pi) = 0$ e in un intorno di (π, π) la funzione cambia segno allora (π, π) è un punto di SELLA.

5.a $f(x,y) = (x-y)^4 - 8(x-y)^2$ Che tipo di punto è $(0,0)$?

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2), \quad f(x,y) = -8(x-y)^2 + o(x^2+y^2)$$

$$\text{da cui} \quad = -8x^2 + 16xy - 8y^2 + o(x^2+y^2)$$

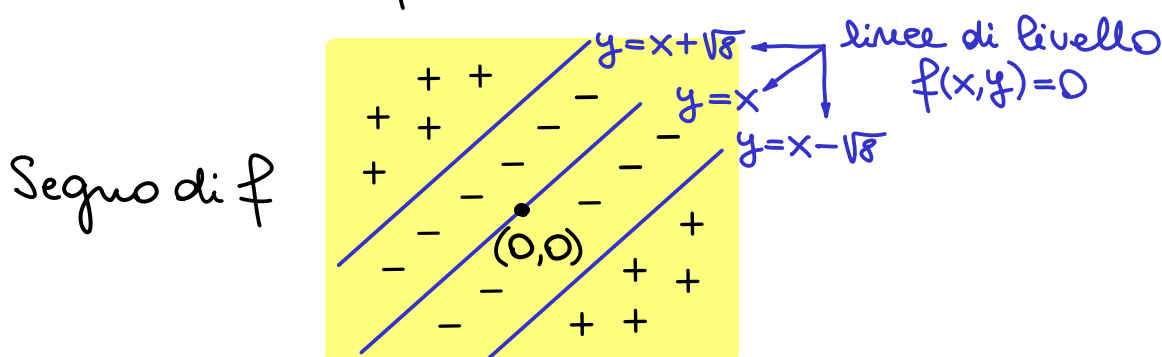
$$f(0,0)=0, \quad \nabla f(0,0)=(0,0), \quad H_f(0,0)=16 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \det(H)=0$$

Abbiamo che

$$f(x,y) = \underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0} \underbrace{((x-y)^2 - 8)}_{\rightarrow -8 \text{ per } (x,y) \rightarrow (0,0)} \leq 0 = f(0,0) \text{ in un intorno di } (0,0)$$

quindi è < 0 in un intorno di $(0,0)$

Quindi $(0,0)$ è un punto di MASSIMO RELATIVO



5.b $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ Che tipo di punto è $(0,0)$?

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2),$$

$$f(x,y) = -2(x-y)^2 + o(x^2+y^2)$$

$$\text{da cui} \quad = -2x^2 + 4xy - 2y^2 + o(x^2+y^2)$$

$$f(0,0)=0, \quad \nabla f(0,0)=(0,0), \quad H_f(0,0)=4 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \det(H)=0$$

Restringendo f abbiamo che

$$y=x: f(x,x) = 2x^4 \quad \frac{++ \quad ++}{0}$$

$$y=0: f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x(x^2 - 2) \quad \frac{-- \quad --}{0} \text{ in un intorno di } 0$$

Quindi $(0,0)$ è un punto di SELLA.

5.c

$$f(x,y) = 1 + 2x^2y^2 - x^4y^4$$

Che tipo di punto è $(0,0)$?

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2), \quad f(x,y) = 1 + o(x^2 + y^2)$$

da cui

$$f(0,0) = 1, \quad \nabla f(0,0) = (0,0), \quad H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(H) = 0$$

Abbiamo che

$$f(x,y) = 1 + \underbrace{x^2y^2}_{\geq 0} \underbrace{(2 - x^2y^2)}_{\rightarrow 2 \text{ per } (x,y) \rightarrow (0,0)} \geq 1 = f(0,0) \quad \text{in un intorno di } (0,0)$$

quindi è > 0 in un intorno di $(0,0)$

Quindi $(0,0)$ è un punto di MINIMO RELATIVO.

5.d

$$f(x,y) = (y - 2x^2)(y - x^2)$$

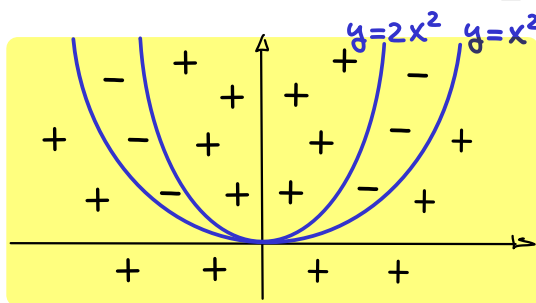
Che tipo di punto è $(0,0)$?

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2), \quad f(x,y) = y^2 + o(x^2 + y^2)$$

da cui

$$f(0,0) = 0, \quad \nabla f(0,0) = (0,0), \quad H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \det(H) = 0$$

Segno di f



Restringendo f abbiamo che

$$y = 0: f(x,0) = 2x^4 \quad \begin{array}{c} + + \quad 0 \quad + + \\ \hline \end{array}$$

$$y = \frac{3}{2}x^2: f(x, \frac{3}{2}x^2) = (-\frac{1}{2}x^2)(\frac{1}{2}x^2) = -\frac{x^4}{4} \quad \begin{array}{c} - - \quad 0 \quad - - \\ \hline \end{array}$$

Quindi $(0,0)$ è un punto di SELLA.

5.e $f(x,y) = 4 - \sqrt{x^2 + 4y^2}$ Che tipo di punto è $(0,0)$?

Si noti che f non è derivabile in $(0,0)$.

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = 4 - \underbrace{\sqrt{x^2 + 4y^2}}_{\geq 0} \leq 4 = f(0,0).$$

Quindi $(0,0)$ è un punto di MASSIMO ASSOLUTO.

5.f $f(x,y) = x^4 e^{xy} (x^2 + y - x - 1)$ Che tipo di punto è $(0,0)$?

Si ha che $f(0,0) = 0$. Inoltre,

$$f(x,y) = \underbrace{x^4 e^{xy}}_{\geq 0} \underbrace{(x^2 + y - x - 1)}_{\rightarrow -1 \text{ per } (x,y) \rightarrow (0,0)} \leq 0 = f(0,0) \text{ in un intorno di } (0,0)$$

quindi è < 0 in un intorno di $(0,0)$

Quindi $(0,0)$ è un punto di MASSIMO RELATIVO.

5.g $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2) - 3xy$ Che tipo di punto è $(0,0)$?

Per $(x,y) \rightarrow (0,0)$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 + o(x^2 + y^2) - 3xy \\ &= \frac{1}{2} \langle H_f(0,0)(x,y), (x,y) \rangle + o(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

$$\text{dove } H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(H) = 4 - 9 < 0 \text{ SELLA.}$$

Più in generale se $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2) + axy$

$$\text{con } a \in \mathbb{R} \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0), H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi $(0,0)$ è di SELLA se $4 - a^2 < 0$ ossia $|a| > 2$

e, visto che $\text{tr}(H) = 4$, è di MINIMO RELATIVO se $|a| < 2$.

Nel caso "critico" $a=2$ (simile per $a=-2$) si ha che $f(0,0)=0$ e

1) se $y=-x$, per $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} f(x,x) &= \log(1+2x^2) - 2x^2 \\ &= 2x^2 - \frac{1}{2}(2x^2)^2 + o(x^4) - 2x^2 \\ &= -2x^4(1+o(1)) \quad \text{-- --} \quad \text{-- --} \quad \text{in un intorno di } 0 \end{aligned}$$

2) se $y=0$: $f(x,0) = \log(1+x^2) \quad \text{++} \quad \text{++}$

Quindi $(0,0)$ è un punto di SELLA anche per $a=2$.

5.R $f(x,y) = (1 - \cos(x^2+y^2)) \sin(x-y^2)$ Che tipo di punto è $(0,0)$?

Per $(x,y) \rightarrow (0,0)$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (1 - (1 + o(x^2+y^2))) (x - y^2 + o(x^2+y^2)) \\ &= o(x^2+y^2) \end{aligned}$$

da cui

$$f(0,0)=1, \nabla f(0,0)=(0,0), H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(H)=0$$

Notiamo che $(1 - \cos(x^2+y^2)) \geq 0$ mentre $\sin(x-y^2)$ cambia segno in ogni intorno di $(0,0)$.

In particolare, restringendo f a $y=0$ si ha

$$f(x,0) = \underbrace{(1 - \cos(x^2))}_{\geq 0} \sin(x) \quad \text{-- --} \quad \text{++} \quad \text{in un intorno di } 0$$

Quindi $(0,0)$ è un punto di SELLA.