

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 7

ESEMPIO

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{n-1}(n+1)! + 2n^{n-2}(n+2)!}{n^{10} \cdot 10^n - n! \cdot n^n} &= ? \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^n} \cdot \cancel{n!} \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right) + 2 \cdot \left(\frac{(n+2)(n+1)}{n^2} \right) \right)}{\cancel{n^n} \cdot \cancel{n!} \cdot \left(\left(\frac{n^{10}}{n^n} \right) \left(\frac{10^n}{n!} \right) - 1 \right)} = -5. \end{aligned}$$

$\xrightarrow{-1} \quad \xrightarrow{-1} \quad \xrightarrow{-1} \quad \xrightarrow{-1}$
 $\xrightarrow{-0} \quad \xrightarrow{-0}$

OSSERVAZIONE Se il limite ha la forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n}$$

con $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ usando

l'identità $a^b = e^{b \log(a)}$ possiamo avere

altre forme indeterminate del tipo $0 \cdot \infty$:

$$1^{\pm \infty} = e^{\pm \infty \cdot \log(1)} = e^{\pm \infty \cdot 0}$$

$$(0^+)^0 = e^{0 \cdot \log(0^+)} = e^{0 \cdot (-\infty)}$$

$$(+\infty)^0 = e^{0 \cdot \log(+\infty)} = e^{0 \cdot (+\infty)}$$

In generale per a^b vale lo schema

a^b	$-\infty$	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$+\infty$	?	0^+	0^+
$0 < a < 1$	$+\infty$	a^b	1	a^b	0^+
$a = 1$	?	1	1	1	?
$a > 1$	0^+	a^b	1	a^b	$+\infty$
$+\infty$	0^+	0^+	?	$+\infty$	$+\infty$

ESEMPI

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{2n+1} \right)^{\log(n)} = \left(\frac{3}{2} \right)^{+\infty} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{a^{n \log(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^{\log(a)}} \right)^n$$

$a^{\log(n)} = e^{\log(a) \cdot \log(n)} = n^{\log(a)}$ per $a > 0$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{n(1-\log(a))} = \begin{cases} 0 & \text{se } a > e & 1-\log(a) < 0 \\ 1 & \text{se } a = e & 1-\log(a) = 0 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < e & 1-\log(a) > 0 \end{cases}$$

IL NUMERO DI NEPERO e

TEOREMA La successione $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}_{n \geq 1}$ è convergente e il suo limite è detto NUMERO DI NEPERO e : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$.

OSSERVAZIONE Si dimostra che $e \notin \mathbb{Q}$ e il suo valore è

$$e = 2.718281828459...$$

dim. Verifichiamo la convergenza dimostrando che 1) la successione è strettamente crescente e 2) la successione è superiormente limitata e dunque il limite esiste e vale

$$\sup \left(\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n : n \in \mathbb{N}^+ \right\} \right) \in \mathbb{R}.$$

1) Stretta crescenza: $\forall m \geq 1 \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} &= \sum_{k=0}^{m+1} \underbrace{\binom{m+1}{k}}_{\checkmark} \underbrace{\frac{1}{(m+1)^k}}_{\checkmark} + \left(\frac{1}{(m+1)^{m+1}}\right)_{>0} \\ &> \sum_{k=0}^m \underbrace{\binom{m}{k}}_{\checkmark} \frac{1}{m^k} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \end{aligned}$$

perché

$$\begin{aligned} \underbrace{\binom{m+1}{k}}_{\checkmark} \frac{1}{(m+1)^k} &= \frac{\cancel{m+1}}{\cancel{m+1}} \cdot \frac{m}{m+1} \cdots \frac{m+1-k+1}{m+1} \cdot \frac{1}{k!} \\ &\quad \checkmark \quad j=0 \checkmark \quad j=1 \checkmark \quad j=k-1 \checkmark \\ \underbrace{\binom{m}{k}}_{\checkmark} \frac{1}{m^k} &= \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}} \cdot \frac{m-1}{m} \cdots \frac{m-k+1}{m} \cdot \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{per } j \geq 0 \quad \frac{m+1-j}{m+1} &\geq \frac{m-j}{m} \iff \cancel{m^2} + \cancel{m} - \cancel{mj} \geq \cancel{m^2} + \cancel{m} - \cancel{mj} - j \\ &\iff j \geq 0 \end{aligned}$$

2) Limitatezza superiore: $\forall m \geq 2$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} \\ &\leq 2 + \sum_{k=2}^m \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\ &= 2 + 1 - \frac{1}{m} < 3 \end{aligned}$$

perché per $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \binom{m}{k} \frac{1}{m^k} &= \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}} \cdot \overset{\leq 1}{\left(\frac{m-1}{m}\right)} \cdots \overset{\leq 1}{\left(\frac{m-k+1}{m}\right)} \cdot \frac{1}{k!} \\ &\leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Quindi la successione ha 3 come maggiorante e dunque è limitata superiormente. □

ESEMPI

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$ perché $\{n^2\}_{n \geq 1}$ è una sottosucc. di $\{n\}_{n \geq 1}$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$

Per confronto:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\rightarrow e}\right)^n \geq 2^n \rightarrow +\infty$$

definitivamente
perché $e > 2$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$

Per doppio confronto:

$$1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}_{\rightarrow e}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

definitivamente
perché $e < 3$

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ allora

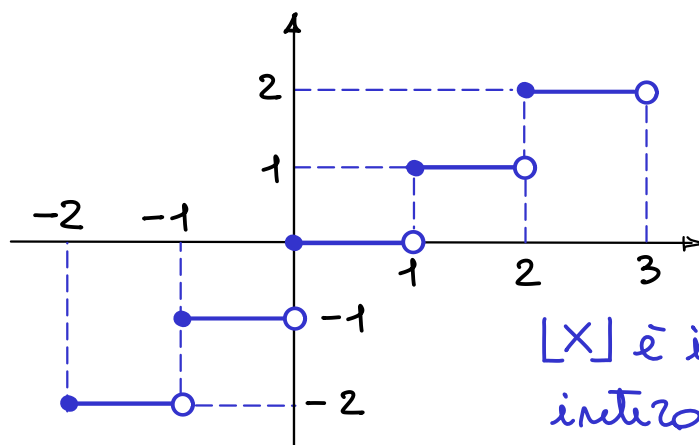
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Per doppio confronto: $[a_n] \leq a_n < [a_n] + 1$

$$e \leftarrow \left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1}\right)^{[a_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n] + 1} \rightarrow e$$

dove $[X]$ è la funzione PARTE INTERA

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad [X] = m \quad \text{se} \quad x \in [m, m+1)$



$[X]$ è il più grande
intero $m \leq x$

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Posto $b_n = -(a_n + 1) \rightarrow +\infty$ e

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \left(\frac{a_n \pm 1}{a_n + 1}\right)^{-a_n} = \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \cdot \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{-1} \rightarrow e.$$

$\xrightarrow{\text{blue}} e \qquad \qquad \qquad \xrightarrow{\text{blue}} 1$

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ allora $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x.$$

Per $x=0$ è ovvio. Per $x \neq 0$, se $b_n = \frac{a_n}{x}$ allora $|b_n| \rightarrow +\infty$

$$\left(1 + \frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = \left(\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n}\right)^x \rightarrow e^x.$$

- Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e $a_n \neq 0$ allora $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x a_n\right)^{\frac{1}{a_n}} = e^x.$$

Posto $b_n = \frac{1}{a_n}$ allora $|b_n| \rightarrow +\infty$ e

$$\left(1 + x a_n\right)^{\frac{1}{a_n}} = \left(1 + \frac{x}{b_n}\right)^{b_n} \rightarrow e^x.$$

ESEMPI

• $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1} \right)^{2n} = ?$

Per $n \rightarrow \infty$, $a_n = \frac{3n+1}{n^2+1} \rightarrow 0$ e

$$\left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1} \right)^{2n} = \left(\underbrace{\left(1 + a_n \right)}_{\rightarrow e}^{\frac{1}{a_n}} \right)^{\overbrace{a_n \cdot 2n}^{\rightarrow 6}} \rightarrow e^6.$$

$$a_n \cdot 2n = \frac{6n^2 + 2n}{n^2 + 1} = \frac{\cancel{n^2} \left(6 + \frac{2}{n} \right)}{\cancel{n^2} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} \xrightarrow[\rightarrow 0]{\rightarrow 0} 6$$

• Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e $a_n \neq 0$ allora

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\left(1 + a_n \right)^{\frac{1}{a_n}} \right) = \log(e) = 1.$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\log(1+b_n)} = 1.$
 $\uparrow$
 $b_n = e^{a_n} - 1 \rightarrow 0$
 $a_n = \log(1+b_n)$

3) Per $\alpha \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{b_n} - 1}{b_n} \right) \cdot \alpha \cdot \left(\frac{\log(1+a_n)}{a_n} \right) = \alpha.$$

$$\uparrow$$

$$b_n = \alpha \log(1+a_n) \rightarrow 0$$

$$e^{b_n} = (1+a_n)^\alpha$$