

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 6

ESEMPI

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a(n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} \quad \log_a\left(\frac{1}{n}\right) = -\log_a(n)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + (-1)^n n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{\rightarrow +\infty}{(n^2)} \left(1 + \underbrace{\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)}_{\rightarrow 0}\right) = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg(n) \cdot n - \overbrace{n^2 \sqrt{n}}^{n^{5/2}}}{\underbrace{2 \cdot n \cdot \sqrt{n^3}}_{n^{5/2}} + 3 \cdot e^{-n}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overset{\rightarrow \pi/2}{n^{5/2}} (\overset{\rightarrow 0}{\arctg(n)} \cdot \overset{\rightarrow 0}{n^{-3/2}} - 1)}{\overset{\rightarrow 0}{n^{5/2}} (2 + \underbrace{3 \cdot e^{-n} n^{-5/2}}_{\rightarrow 0})} = -\frac{1}{2}$$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + bn + c} - n) = +\infty - \infty$
con $b, c \in \mathbb{R}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + bn + c} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + bn + c} + n}{\sqrt{n^2 + bn + c} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2} + bn + c - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2 + bn + c} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n} (b + \underbrace{\frac{c}{n}}_{\rightarrow 0})}{\cancel{n} (\underbrace{\sqrt{1 + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}}_{\rightarrow 0} + 1)} = \frac{b}{2}$$

- Confronto tre polinomi di grado $r, s \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \dots + a_0}{b_s n^s + b_{s-1} n^{s-1} + \dots + b_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{r-s} \cdot \frac{a_r + a_{r-1} n^{-1} + \dots + a_0 n^{-r}}{b_s + b_{s-1} n^{-1} + \dots + b_0 n^{-s}}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } r > s \text{ e } a_r \cdot b_s > 0 \\ -\infty & \text{se } r > s \text{ e } a_r \cdot b_s < 0 \\ \frac{a_r}{b_s} & \text{se } r = s \\ 0 & \text{se } r < s \end{cases}$$

TEOREMA (CRITERIO DEL RAPPORTO)

Sia $\{a_n\}_n$ una successione positiva tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

1) Se $L > 1$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

2) Se $L < 1$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

OSSERVAZIONE

Se $L = 1$ allora la conoscenza di L non

basta per trovare $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$:

se $a_n = n$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

se $a_n = \frac{1}{n}$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ESEMPI

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$ per $b > 0$ e $a > 1$.

Sia $a_n = \frac{n^b}{a^n}$ allora per $n \rightarrow \infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^b}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^b} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^b \cdot \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} < 1$$

e per il criterio del rapporto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Notiamo che se $b > 0$ e $0 < a < 1$ allora per $n \rightarrow \infty$

$$\frac{n^b}{a^n} \rightarrow \frac{+\infty}{0^+} = +\infty.$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$ per $a > 0$.

Sia $a_n = \frac{n!}{a^n}$ allora per $n \rightarrow \infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n!} = \frac{n+1}{a} \rightarrow +\infty > 1$$

e per il criterio del rapporto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{n!} = +\infty$. $2^{n^2} = 2^{(n^2)} \neq (2^n)^2 = 2^{2n}$

Sia $a_n = \frac{2^{n^2}}{n!}$ allora per $n \rightarrow \infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n^2}} = \frac{2^{n^2+2n+1-n^2}}{n+1} = 2 \cdot \frac{4^n}{n+1} \rightarrow +\infty > 1$$

e per il criterio del rapporto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = +\infty.$

Sia $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ allora per $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \\ &= \frac{\cancel{(2n+2)}^2 \cdot (2n+1) \cdot \cancel{(2n)!}}{(n+1)^2 \cdot \cancel{(n!)^2}} \cdot \frac{\cancel{(n!)^2}}{\cancel{(2n)!}} \\ &= \frac{4n+2}{n+1} = \frac{4 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow 4 > 1 \end{aligned}$$

e per il criterio del rapporto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$

CONFRONTI TRA INFINITI

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ e supponiamo

che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} +\infty \\ l \in (0, +\infty) \\ 0 \end{cases}$ allora

1) nel caso $+\infty$ diciamo che

a_n è un INFINITO DI ORDINE SUPERIORE a b_n

2) nel caso $l \in (0, +\infty)$ diciamo che

a_n è un INFINITO DELLO STESSO ORDINE di b_n

3) nel caso 0 diciamo che

a_n è un INFINITO DI ORDINE INFERIORE a b_n

I seguenti infiniti sono in ordine crescente

$$\log_a(m), m^b, a^m, m!, m^m$$

dove $a > 1$ e $b > 0$.

Abbiamo già verificato che $m!$ ha ordine superiore ad a^m che ha ordine superiore a m^b .

- $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m!}{m^m} = 0$

perché $0 < \frac{m!}{m^m} = \frac{1}{m} \cdot \left(\overset{\leq 1}{\frac{2}{m}} \cdot \overset{\leq 1}{\frac{3}{m}} \cdots \overset{\leq 1}{\frac{m-1}{m}} \cdot \frac{m}{m} \right) \leq \frac{1}{m} \rightarrow 0$

e la conclusione vale per doppio confronto.

- $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log_a(m)}{m^b} = 0$ per $a > 1$ e $b > 0$.

Per semplicità consideriamo solo il caso $b=1$.

Per $\varepsilon > 0$ devo verificare che definitivamente

$$0 < \frac{\log_a(m)}{m} < \varepsilon \iff \log_a(m) < \varepsilon m \iff m < a^{\varepsilon m}$$

$$\iff \frac{m}{(a^\varepsilon)^m} < 1 \text{ che vale definitivamente}$$

perché $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{\underbrace{(a^\varepsilon)^m}_{>1}} = 0$.

ESEMPIO

- $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} m^{\frac{1}{m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{\frac{\log m}{m}} = e^0 = 1$.

$a^b = e^{b \log(a)}$