

Analisi Matematica

Foglio di esercizi n. 3

SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 3^n}{n^2 + n^3}}.$$

Abbiamo che per $n \rightarrow \infty$,

$$\sqrt[n]{\frac{2^n + 3^n}{n^2 + n^3}} = 3 \cdot \sqrt[n]{\frac{(2/3)^n + 1}{n^3(1/n + 1)}} = 3 \cdot \frac{\sqrt[n]{1 + (2/3)^n}}{(\sqrt[n]{n})^3 \sqrt[n]{1 + 1/n}} \rightarrow 3$$

in quanto

$$\sqrt[n]{n} = \exp\left(\frac{\log(n)}{n}\right) \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{a_n} = \exp\left(\frac{\log(a_n)}{n}\right) \rightarrow 1$$

se $a_n \rightarrow L > 0$.

Esercizio 1.b. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)^n - n^n}.$$

Dato che per $n \geq 1$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}}_{\geq 0} \geq 2$$

abbiamo

$$\sqrt[n]{(n+1)^n - n^n} = n \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1} \geq n \sqrt[n]{2 - 1} = n$$

e quindi per confronto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)^n - n^n} = +\infty.$$

Esercizio 1.c. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n+1} - \sqrt{9n+8}}{\sqrt{4n-1} - \sqrt{4n+7}}.$$

Razionalizzando sia il numeratore che il denominatore, si ha che per $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{9n+1} - \sqrt{9n+8}}{\sqrt{4n-1} - \sqrt{4n+7}} &= \frac{(9n+1) - (9n+8)}{(4n-1) - (4n+7)} \cdot \frac{\sqrt{4n-1} + \sqrt{4n+7}}{\sqrt{9n+1} + \sqrt{9n+8}} \\ &= \frac{7}{8} \cdot \frac{\sqrt{4n}}{\sqrt{9n}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4n}} + \sqrt{1 + \frac{7}{4n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{9n}} + \sqrt{1 + \frac{8}{9n}}} \rightarrow \frac{7}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Esercizio 1.d. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)! - (2n)!}{n^2((2n+1)! - (2n)!)}.$$

Dividendo sia il numeratore che il denominatore per $(2n)!$, si ha che per $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{(2n+3)! - (2n)!}{n^2((2n+1)! - (2n)!)} &= \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1) - 1}{n^2((2n+1) - 1)} \\ &= \frac{n^3 \left(2 + \frac{3}{n}\right) \left(2 + \frac{2}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) - 1}{2n^3} \rightarrow \frac{8}{2} = 4. \end{aligned}$$

Esercizio 1.e. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{4^n \cdot n!}.$$

Applicando il criterio del rapporto,

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{4^n n!}{n^n} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{e}{4} < 1$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{4^n \cdot n!} = 0.$$

Esercizio 1.f. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{n! \cdot n^n}.$$

Applicando il criterio del rapporto,

$$\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n! n^n}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{4}{e} > 1$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{n! \cdot n^n} = +\infty.$$

Esercizio 1.g. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln(\cos(1/n)).$$

Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2},$$

allora per $n \rightarrow \infty$, $1/n \rightarrow 0$, $\cos(1/n) - 1 \rightarrow 0$ e

$$n^2 \ln(\cos(1/n)) = \underbrace{\frac{\ln(1 + (\cos(1/n) - 1))}{\cos(1/n) - 1}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\cos(1/n) - 1}{1/n^2}}_{\rightarrow -1/2} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Esercizio 1.h. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[4]{\frac{n+1}{n+6}} - 1 \right).$$

Ricordando che per $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a,$$

allora per $n \rightarrow \infty$, $-5n/(n+6) \rightarrow 0$ e

$$n \left(\sqrt[4]{\frac{n+1}{n+6}} - 1 \right) = \underbrace{\frac{\left(1 + \frac{-5}{n+6}\right)^{1/4} - 1}{\frac{-5}{n+6}}}_{\rightarrow 1/4} \cdot \underbrace{\frac{-5n}{n+6}}_{\rightarrow -5} \rightarrow -\frac{5}{4}.$$

Esercizio 2.a. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Per $n \rightarrow \infty$,

$$\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n = \exp \left(n \cdot \underbrace{\frac{\ln(1 - \frac{2}{\sqrt{n}})}{-\frac{2}{\sqrt{n}}}}_{\rightarrow 1} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \right) \rightarrow 0$$

perché l'argomento dell'esponenziale tende a $-\infty$.

Esercizio 2.b. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}.$$

Per $n \rightarrow \infty$,

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \exp \left(\sqrt{n} \cdot \underbrace{\frac{\ln(1 + 2/n)}{2/n}}_{\rightarrow 1} \cdot (2/n) \right) \rightarrow 1$$

perché l'argomento dell'esponenziale tende a 0.

Esercizio 2.c. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^{n+1}}.$$

Per $n \rightarrow \infty$,

$$\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^{n+1}} = \left(\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^{n-1}} \right)^4 \rightarrow e^4.$$

Esercizio 2.d. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{\log(n^2)}\right)^{\log(\sqrt{n})}.$$

Per $n \rightarrow \infty$,

$$\left(1 + \frac{3}{\log(n^2)}\right)^{\log(\sqrt{n})} = \left(\left(1 + \frac{3/2}{\log(n)}\right)^{\log(n)} \right)^{1/2} \rightarrow (e^{3/2})^{1/2} = e^{3/4}.$$

Esercizio 2.e. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 5n + 4}{2n^2 - 3n + 6} \right)^{3n+2}.$$

Per $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2n^2 + 5n + 4}{2n^2 - 3n + 6} \right)^{3n+2} &= \exp \left((3n+2) \cdot \frac{\ln(1 + \frac{8n-2}{2n^2-3n+6})}{\frac{8n-2}{2n^2-3n+6}} \cdot \frac{8n-2}{2n^2-3n+6} \right) \\ &= \exp \left(\underbrace{\frac{(3n+2)(8n-2)}{2n^2-3n+6}}_{\rightarrow 12} \cdot \underbrace{\frac{\ln(1 + \frac{8n-2}{2n^2-3n+6})}{\frac{8n-2}{2n^2-3n+6}}}_{\rightarrow 1} \right) \rightarrow e^{12} \end{aligned}$$

Esercizio 2.f. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n + 2^{n+1}}{3^n + 2^{n-1}} \right)^{(3/2)^n}.$$

Per $n \rightarrow \infty$,

$$\left(\frac{3^n + 2^{n+1}}{3^n + 2^{n-1}} \right)^{(3/2)^n} = \frac{\left(1 + \frac{2}{(3/2)^n} \right)^{(3/2)^n}}{\left(1 + \frac{1/2}{(3/2)^n} \right)^{(3/2)^n}} \rightarrow \frac{e^2}{e^{1/2}} = e^{3/2}.$$

Esercizio 3.a. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2x^2)^\pi - 1}{(1 + x)^3 + (1 - x)^3 - 2}.$$

Per $x \rightarrow 0$, dopo aver semplificato il denominatore,

$$\frac{(1 + 2x^2)^\pi - 1}{6x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1 + 2x^2)^\pi - 1}{2x^2} \rightarrow \frac{\pi}{3}$$

dove abbiamo applicato, per $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 + t)^a - 1}{t} = a.$$

Esercizio 3.b. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 4^x}{\tan(2x)}.$$

Per $x \rightarrow 0$,

$$\frac{9^x - 4^x}{\tan(2x)} = \left(\underbrace{\frac{9^x - 1}{x}}_{\rightarrow \log(9)} - \underbrace{\frac{4^x - 1}{x}}_{\rightarrow \log(4)} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{2x}{\tan(2x)}}_{\rightarrow 1} \rightarrow \frac{\log(9) - \log(4)}{2} = \log(3/2)$$

dove abbiamo applicato, per $a > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log(a)} - 1}{x} = \log(a) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log(a)} - 1}{x \log(a)} = \log(a).$$

Esercizio 3.c. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 2x)}{\sin(3^x - 1)}.$$

Per $x \rightarrow 0$,

$$\frac{\log(1 + 2x)}{\sin(3^x - 1)} = \underbrace{\frac{\log(1 + 2x)}{2x}}_{\rightarrow 1} \cdot 2 \cdot \underbrace{\frac{x}{3^x - 1}}_{\rightarrow 1/\ln(3)} \cdot \underbrace{\frac{3^x - 1}{\sin(3^x - 1)}}_{\rightarrow 1} \rightarrow \frac{2}{\log(3)}.$$

Esercizio 3.d. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2^x - 1)}{\log(1 + 2x^2)}.$$

Per $x \rightarrow 0^+$,

$$\frac{\sin(2^x - 1)}{\log(1 + 2x^2)} = \underbrace{\frac{\sin(2^x - 1)}{2^x - 1}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{2^x - 1}{x}}_{\rightarrow \log(2)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2x}}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\frac{2x^2}{\log(1 + 2x^2)}}_{\rightarrow 1} \rightarrow +\infty.$$

Esercizio 3.e. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos(x))^4}{e^{3x^2} - 1}.$$

Per $x \rightarrow 0$,

$$\frac{1 - (\cos(x))^4}{e^{3x^2} - 1} = \underbrace{(1 + (\cos(x))^2)}_{\rightarrow 2} \cdot \underbrace{(1 + \cos(x))}_{\rightarrow 2} \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos(x)}{x^2}}_{\rightarrow 1/2} \cdot \underbrace{\frac{3x^2}{e^{3x^2} - 1}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{3}.$$

Esercizio 3.f. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(\log(3+x) - \log(x))}{\sqrt{4+x} - \sqrt{x}}.$$

Per $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{\sqrt{x}(\log(3+x) - \log(x))}{\sqrt{4+x} - \sqrt{x}} = \frac{\log(1 + (3/x))}{\sqrt{1 + (4/x)} - 1} = \underbrace{\frac{\log(1 + (3/x))}{3/x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{4/x}{\sqrt{1 + (4/x)} - 1}}_{\rightarrow 2} \cdot \frac{3}{4} \rightarrow \frac{3}{2}.$$

Esercizio 4.a. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \{(-1)^n(7 - e^{-n}) : n \in \mathbb{N}\}$$

specificando se sono anche rispettivamente massimo e minimo.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$-7 < -7 + e^{-n} \leq (-1)^n(7 - e^{-n}) \leq 7 - e^{-n} < 7.$$

Quindi 7 è un maggiorante di A e $7 \notin A$ e -7 è un minorante di A e $-7 \notin A$.

Verifichiamo che 7 è il più piccolo dei maggioranti: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un elemento $a \in A$ tale che $7 - \varepsilon < a$?

Sì, dato che $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$, esiste un intero pari n tale che $e^{-n} < \varepsilon$ e dunque

$$7 - \varepsilon < a = (-1)^n(7 - e^{-n}) = 7 - e^{-n}.$$

Così $\sup(A) = 7$ e il massimo non esiste.

In modo simile si verifica che $\inf(A) = -7$ e il minimo non esiste.

Esercizio 4.b. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \{4 \cos^2(x) - 2 \sin(x + \pi) - 1 : x \in \mathbb{R}\}$$

specificando se sono anche rispettivamente massimo e minimo.

Dato che $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$,

$$A = \{-4 \sin^2(x) + 2 \sin(x) + 3 : x \in \mathbb{R}\}.$$

Inoltre, al variare di $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x)$ assume tutti i valori in $[-1, 1]$ ossia $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ e quindi

$$A = \{-4t^2 + 2t + 3 : t \in [-1, 1]\}.$$

La funzione $f(t) = -4t^2 + 2t + 3$ è una parabola con concavità verso il basso il cui vertice è posizionato in $(1/4, 13/4)$. Dato che $1/4 \in [-1, 1]$ possiamo concludere che

$$\sup(A) = \max(A) = \frac{13}{4}.$$

Per il minimo dobbiamo valutare la parabola f agli estremi:

$$\inf(A) = \min(A) = \min(\{f(-1), f(1)\}) = \min(\{-3, 1\}) = -3.$$

Esercizio 5. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$,

$$n! \leq n^n \leq 2^n \cdot (n!)^2$$

e calcolare i seguenti limiti

$$\text{a. } \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{1/n^2} \qquad \text{b. } \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{1/n}.$$

Proviamo prima la doppia disuguaglianza

$$\forall n \geq 1, \quad n! \leq n^n \leq 2^n (n!)^2.$$

Per la prima basta notare che ogni fattore di $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ è minore o uguale ad ogni fattore di $n^n = n \cdot n \cdots n \cdot n$.

La seconda la dimostriamo per induzione. Vale per $n = 1$.

Per il passo induttivo, facciamo vedere che se $n \geq 1$ e $n^n \leq 2^n (n!)^2$ allora

$$(n+1)^{n+1} \leq 2^{n+1} ((n+1)!)^2.$$

Ricordando che $(1 + \frac{1}{n})^n < e$, e applicando l'ipotesi induttiva

$$\begin{aligned} (n+1)^{n+1} &= (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot n^n \\ &\leq (n+1) \cdot e \cdot 2^n (n!)^2 \leq 2^{n+1} ((n+1)!)^2 \end{aligned}$$

dove all'ultimo passaggio abbiamo usato $e < 4 \leq 2(n+1)$.

a. Per la prima disuguaglianza di cui sopra

$$1 \leq (n!)^{1/n^2} \leq (n^n)^{1/n^2} = n^{1/n} \rightarrow 1$$

e dunque per il doppio confronto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{1/n^2} = 1.$$

b. Per la seconda disuguaglianza di cui sopra

$$(n!)^{1/n} \geq \left(\frac{n^n}{2^n}\right)^{1/(2n)} = \sqrt{n/2} \rightarrow +\infty$$

e dunque, per confronto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{1/n} = +\infty.$$