

Analisi Matematica
Foglio di esercizi n. 2
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Risolvere

$$4^{x+1} \cdot 3^{x-1} < 48 \cdot 2^x.$$

Abbiamo che

$$4 \cdot 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 3^{-1} < 48 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{2x-x} \cdot 3^x < \frac{48 \cdot 3}{4} = 36 = 6^2 \Leftrightarrow 6^x < 6^2 \Leftrightarrow x < 2$$

e dunque l'insieme delle soluzioni è $(-\infty, 2)$.

Esercizio 1.b. Risolvere

$$\left| \frac{1}{x} - 4 \right| + \left| \frac{1}{x} + 6 \right| \geq 16.$$

Poniamo $y = 1/x$. Esaminando gli argomenti dei valori assoluti abbiamo che la disequazione è equivalente a

$$\begin{cases} y \geq 4 \\ (y-4) + (y+6) \geq 16 \end{cases} \vee \begin{cases} -6 \leq y < 4 \\ -(y-4) + (y+6) \geq 16 \end{cases} \vee \begin{cases} y < -6 \\ -(y-4) - (y+6) \geq 16 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} y \geq 4 \\ 2y + 2 \geq 16 \end{cases} \vee \begin{cases} -6 \leq y < 4 \\ 10 \geq 16 \end{cases} \vee \begin{cases} y < -6 \\ -2y - 2 \geq 16 \end{cases}$$

Il primo sistema vale per $1/x = y \geq 7$, il secondo non ha soluzioni, mentre il terzo vale per $1/x = y \leq -9$. Osservando che $x \neq 0$, l'insieme delle soluzioni è dato dalle condizioni $0 < x < 1/7$ oppure $-1/9 < x < 0$ ossia

$$\left[-\frac{1}{9}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{1}{7} \right).$$

Esercizio 1.c. Risolvere

$$\frac{4}{8^x - 2} + \frac{5}{8^x + 1} < 3.$$

Poniamo $y = 8^x$, da cui

$$\frac{4y + 4 + 5y - 10 - 3(y^2 - y - 2)}{(y+1)(y-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3y^2 + 12y}{(y+1)(y-2)} < 0$$

che è risolta per

$$y < -1 \quad \vee \quad 0 < y < 2 \quad \vee \quad y > 4.$$

Considerando che $y = 2^{3x}$ è sempre positivo, si ha

$$2^{3x} < 2 \quad \vee \quad 2^{3x} > 4 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \quad \vee \quad x > \frac{2}{3}$$

e dunque l'insieme delle soluzioni è

$$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right).$$

Esercizio 1.d. Risolvere

$$16^{\sin^2(x)} + 16^{\cos^2(x)} \leq 17.$$

Ponendo $y = 16^{\cos^2(x)}$, si ha che $16^{\sin^2(x)} = 16^{1-\cos^2(x)} = 16y^{-1}$ e la disequazione data diventa

$$16y^{-1} + y \leq 17 \Leftrightarrow \frac{(y-1)(y-16)}{y} \leq 0 \Leftrightarrow y < 0 \quad \vee \quad 1 \leq y \leq 16.$$

Ora $y = 16^{\cos^2(x)} < 0$ è sempre falsa, mentre

$$1 \leq 16^{\cos^2(x)} \leq 16 \Leftrightarrow 16^0 \leq 16^{\cos^2(x)} \leq 16^1 \Leftrightarrow 0 \leq \cos^2(x) \leq 1$$

è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'insieme delle soluzioni è $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.a. Determinare il dominio D della funzione

$$f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 3} - x - 1).$$

Le condizioni di esistenza per il dominio sono

$$\begin{cases} x^2 + 3 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + 3} > x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geq -1 \\ x^2 + 3 > (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geq -1 \\ 2 > 2x \end{cases}$$

e quindi

$$D = (-\infty, -1) \cup [-1, 1) = (-\infty, 1).$$

Esercizio 2.b. Determinare il dominio D della funzione

$$f(x) = \log(\sqrt{x^2 - 9} - |x| + 1).$$

Le condizioni di esistenza per il dominio sono

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 9} > |x| - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq 3 \\ \sqrt{x^2 - 9} > |x| - 1 \end{cases}$$

Se $|x| \geq 3$, si ha che $|x| - 1 > 0$ e quindi

$$\sqrt{x^2 - 9} > |x| - 1 \Leftrightarrow x^2 - 9 > (|x| - 1)^2 = x^2 - 2|x| + 1 \Leftrightarrow |x| > 5$$

e così

$$D = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty).$$

Esercizio 2.c. Determinare il dominio D della funzione

$$f(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\ln(8 - |2x + 1|)}.$$

Le condizioni di esistenza per il dominio sono

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{x} > 0 \\ \ln(8 - |2x + 1|) \neq 0 \\ 8 - |2x + 1| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ |2x - 1| \neq 7 \\ -8 < 2x + 1 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 0 \\ x \neq 3 \wedge x \neq -4 \\ \frac{9}{2} < x < \frac{7}{2} \end{cases}$$

Da cui, alla fine otteniamo

$$D = \left(-\frac{9}{2}, -4\right) \cup (-4, -1) \cup (0, 3) \cup \left(3, \frac{7}{2}\right).$$

Esercizio 2.d. Determinare il dominio D della funzione

$$f(x) = \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{|x-1|-2}} \right).$$

Dobbiamo determinare le soluzioni di

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{\sqrt{|x-1|-2}} \right| \leq 1 \\ \sqrt{|x-1|-2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq |\sqrt{|x-1|-2}| \Leftrightarrow 3 \leq \sqrt{|x-1|} \vee \sqrt{|x-1|} \leq 1$$

La prima disequazione è equivalente a $|x-1| \geq 9$ e dunque ha soluzioni $(-\infty, -8] \cup [10, \infty)$. La seconda ha soluzioni equivalente a $|x-1| \leq 1$ e dunque ha soluzioni $[0, 2]$. Unendo i risultati ottenuti troviamo l'insieme completo delle soluzioni. Possiamo concludere che il dominio è

$$D = (-\infty, -8] \cup [0, 2] \cup [10, \infty).$$

Esercizio 3.a. Dimostrare per induzione che

$$\forall n \geq 6, \quad n2^n \leq n!$$

Passo base. Verifichiamo $P(6)$:

$$6 \cdot 2^6 = 384 \leq 6! = 720.$$

Passo induttivo. Dimostriamo che per $n \geq 6$ se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$:

$$(n+1)2^{n+1} = (n+1) \cdot 2 \cdot 2^n \leq (n+1) \cdot n2^n \stackrel{P(n)}{\leq} (n+1)n! = (n+1)!$$

Esercizio 3.b. Dimostrare per induzione che

$$\forall n \geq 5, \quad \binom{2n}{n} < 4^{n-1}.$$

Passo base. Verifichiamo $P(5)$:

$$252 = \binom{2 \cdot 5}{5} < 4^{5-1} = 256.$$

Passo induttivo. Dimostriamo che per $n \geq 5$ se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$:

$$\begin{aligned} \binom{2(n+1)}{n+1} &= \frac{2(n+1)}{n+1} \binom{2n+1}{n} = 2 \binom{2n+1}{n+1} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n} \stackrel{P(n)}{<} \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot 4^{n-1}. \end{aligned}$$

Basta allora verificare che

$$\frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot 4^{n-1} \leq 4^n$$

ossia

$$2n+1 \leq 2(n+1) = 2n+2$$

che è vera.

Esercizio 3.c. Dimostrare per induzione che

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Passo base. Verifichiamo $P(1)$:

$$1 = \sum_{k=0}^1 k^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1.$$

Passo induttivo. Dimostriamo che per $n \geq 1$ se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \stackrel{P(n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

Esercizio 3.d. Dimostrare per induzione che

$$\forall n \geq 1 \text{ e } \forall x \neq 1, \quad \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Passo base. Verifichiamo $P(1)$:

$$x^0 + x^1 = \sum_{k=0}^1 x^k = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 1 + x.$$

Passo induttivo. Dimostriamo che per $n \geq 1$ se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1} \stackrel{P(n)}{=} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+1} = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}.$$

Esercizio 3.e. Dimostrare per induzione che

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ e } \forall x \in (-1, 0), \quad (1+x)^n < 1 + nx + n^2 x^2.$$

Passo base. Verifichiamo $P(1)$:

$$1 + x < 1 + x + x^2 \Leftrightarrow x^2 > 0$$

dove $x^2 > 0$ vale perché $x \neq 0$.

Passo induttivo. Dimostriamo che per $n \geq 1$ se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$: dato che $(1+x) > 0$,

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \stackrel{P(n)}{<} (1+nx+n^2x^2)(1+x) = \\ &= 1 + (n+1)x + (n+n^2+n^2x)x^2 \leq 1 + (n+1)x + (n+1)^2x^2\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza vale se

$$(n+n^2+n^2x) \leq (n+1)^2 \Leftrightarrow x \leq \frac{n+1}{n^2}$$

che è vera dato che $x < 0 < \frac{n+1}{n^2}$.

Esercizio 4.a. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \{\sin(1/x) : x \in (0, +\infty)\}$$

specificando se sono anche rispettivamente massimo e minimo.

I valori della funzione seno appartengono all'intervallo $[-1, 1]$, quindi se esiste $x_1 \in (0, +\infty)$ tale che $\sin(1/x_1) = -1$ e esiste $x_2 \in (0, +\infty)$ tale che $\sin(1/x_2) = 1$ possiamo concludere che

$$\inf(A) = \min(A) = -1 \quad \text{e} \quad \sup(A) = \max(A) = 1.$$

Ad esempio possiamo prendere $x_1 = \frac{2}{3\pi} \in (0, +\infty)$ e $x_2 = \frac{2}{\pi} \in (0, +\infty)$.

Esercizio 4.b. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \{x \in (0, +\infty) : \sin(1/x) = 0\}$$

specificando se sono anche rispettivamente massimo e minimo.

Le soluzioni $x > 0$ dell'equazione $\sin(1/x) = 0$ sono

$$\frac{1}{x} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{k\pi}$$

con $k \in \mathbb{N}^+$ e quindi

$$A = \left\{ \frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

Dato che $\frac{1}{k\pi} \leq \frac{1}{\pi}$ e $\frac{1}{\pi} \in A$ abbiamo che $\sup(A) = \max(A) = \frac{1}{\pi}$. Mentre

$$\forall k \in \mathbb{N}^+, \quad 0 < \frac{1}{k\pi} \quad \wedge \quad \forall \epsilon > 0, \quad \frac{1}{k\pi} < \epsilon \text{ per } k \in \mathbb{N}^+ \text{ tale che } k > \frac{1}{\epsilon\pi}$$

implica che A non ha minimo e $\inf(A) = 0$.

Esercizio 4.c. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ n - \sqrt{n^2 - n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

specificando se sono anche rispettivamente massimo e minimo.

Dato che

$$a_n = n - \sqrt{n^2 - n} = \frac{n^2 - (n^2 - n)}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}},$$

si verifica facilmente che $\{a_n\}_n$ è una successione decrescente ossia $a_{n+1} \leq a_n$ e quindi

$$\sup(A) = \max(A) = a_1 = 1.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$,

$$a_n = \frac{1}{1 + \underbrace{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}}_{<1}} > \frac{1}{2}.$$

Inoltre per $\epsilon > 0$, scegliendo $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $n > \frac{(1+2\epsilon)^2}{8\epsilon}$, si ha $\frac{1}{2} + \epsilon > a_n$ e quindi $\inf(A) = \frac{1}{2}$ e A non ha minimo.

Esercizio 4.d. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ n + \frac{10}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

specificando se sono anche rispettivamente massimo e minimo.

Osserviamo che per $n \in \mathbb{N}^+$, $a_n = n + \frac{10}{n} > n$ e quindi l'insieme non è limitato superiormente. Quindi $\sup(A) = +\infty$ e A non ha massimo.

Inoltre per $n = 1, 2, 3$ otteniamo i numeri 11, 7, 19/3 e per $n \geq 4$, si verifica che

$$n + \frac{10}{n} > 4 > \frac{19}{3}.$$

Così

$$\inf(A) = \min(A) = \min\{11, 7, 19/3\} = \frac{19}{3}.$$

Esercizio 4.e. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ \sqrt{3}|n^2 - 20| + 20 \tan(n\pi/3) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

specificando se sono anche rispettivamente massimo e minimo.

Il termine $\sqrt{3}|n^2 - 20|$ non è limitato superiormente, mentre $20 \tan(n\pi/3)$ è limitato perché per ogni $n \in \mathbb{Z}$,

$$\tan(n\pi/3) \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}.$$

Quindi $\sup(A) = +\infty$ e A non ha massimo.

Osserviamo che se $|n| \geq 7$ allora

$$\sqrt{3}|n^2 - 20| + 20 \tan(n\pi/3) \geq \sqrt{3}(49 - 20) - 20\sqrt{3} = 9\sqrt{3} > 0$$

mentre calcolando esplicitamente il termine per $n \in [-6, 6] \cap \mathbb{Z}$ si vede che il minimo viene raggiunto per $n = -4$ e vale $-16\sqrt{3} < 0$. Così

$$\inf(A) = \min(A) = -16\sqrt{3}.$$

Esercizio 5.a. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n \cdot n! - 5^n \cdot n^n}{n^5 + n^{2n}}.$$

Abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n n! - 5^n n^n}{n^5 + n^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{\frac{10^n}{n^n}}^{\rightarrow 0} \cdot \overbrace{\frac{n!}{n^n}}^{\rightarrow 0} - \overbrace{\frac{5^n}{n^n}}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{\frac{n^5}{n^{2n}}}_{\rightarrow 0} + 1} = 0.$$

Esercizio 5.b. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n - 1)(2 - \cos(n!))}{\log(3^n - 1)}.$$

Dato che $2 - \cos(n!) \geq 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n - 1)(2 - \cos(n!))}{\ln(3^n - 1)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{2^n}{n}}_{\rightarrow +\infty} \cdot \frac{\overbrace{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}^{\rightarrow 0}}{\ln(3) + \underbrace{\frac{\log(1 - 1/3^n)}{n}}_{\rightarrow 0}} = +\infty$$

e per confronto il limite dato vale $+\infty$.

Esercizio 5.c. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5 - n)^5 + n^5}{(4 - n)^4 + n^4}.$$

Sviluppando le potenze al numeratore e al denominatore otteniamo che per $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{(5 - n)^5 + n^5}{(4 - n)^4 + n^4} = \frac{-n^5 + 25n^4 + p(n) + n^5}{n^4 + q(n) + n^4} = \frac{25 + \overbrace{\frac{p(n)}{n^4}}^{\rightarrow 0}}{2 + \underbrace{\frac{q(n)}{n^4}}_{\rightarrow 0}} \rightarrow \frac{25}{2}$$

dove $p(n)$ e $q(n)$ sono due polinomi di terzo grado.

Esercizio 5.d. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{4^n - n}{2^n + n} - \frac{4^n + n}{2^n - n} \right).$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left(\frac{4^n - n}{2^n + n} - \frac{4^n + n}{2^n - n} \right) &= \frac{(4^n - n)(2^n - n) - (4^n + n)(2^n + n)}{n(4^n - n^2)} \\ &= \frac{-2n(4^n + 2^n)}{n(4^n - n^2)} = \frac{-2 \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{n^2}{4^n}}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{4^n - n}{2^n + n} - \frac{4^n + n}{2^n - n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{n^2}{4^n}} = -2.$$

Esercizio 5.e. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n n}{n^2 + 1}.$$

La successione $a_n = \frac{(-2)^n n}{n^2 + 1}$ non ha limite. Infatti considerando le sottosuccessione generata dai numeri pari e quella generata dai numeri dispari, otteniamo limiti diversi

$$a_{2n} = \frac{4^n(2n)}{(2n)^2 + 1} \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = \frac{-2 \cdot 4^n(2n+1)}{(2n+1)^2 + 1} \rightarrow -\infty.$$

Esercizio 5.f. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^{n^2+3}}{\log(n^n) + 2^{n^2+1}}.$$

Per $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{3^n + 2^{n^2+3}}{\log(n^n) + 2^{n^2+1}} = \frac{3^n + 8 \cdot 2^{n^2}}{n \log(n) + 2 \cdot 2^{n^2}} = \frac{2^{n^2} (8 + 3^n \cdot 2^{-n^2})}{2^{n^2} (2 + n \log(n) \cdot 2^{-n^2})} \rightarrow \frac{8}{2} = 4.$$

Esercizio 5.g. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^2 + 3)}{\log(n^3 + 2)}.$$

Per $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{\log(n^2 + 3)}{\log(n^3 + 2)} = \frac{\log(n^2(1 + 3/n^2))}{\log(n^3(1 + 2/n^3))} = \frac{2 \log(n) + \log(1 + 3/n^2)}{3 \log(n) + \log(1 + 2/n^3)} = \frac{2 + \frac{\ln(1+3/n^2)}{\ln(n)}}{3 + \frac{\ln(1+2/n^3)}{\ln(n)}} \rightarrow \frac{2}{3}.$$

Esercizio 5.h. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\sqrt{n - 3\sqrt{n} + 1} - \sqrt{4n + 1} \right).$$

Razionalizzando la differenza di radici quadrate si ha

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n - 3\sqrt{n} + 1} - \sqrt{4n + 1} &= \left(2\sqrt{n - 3\sqrt{n} + 1} - \sqrt{4n + 1} \right) \cdot \frac{2\sqrt{n - 3\sqrt{n} + 1} + \sqrt{4n + 1}}{2\sqrt{n - 3\sqrt{n} + 1} + \sqrt{4n + 1}} \\ &= \frac{4(n - 3\sqrt{n}) - (4n + 1)}{2\sqrt{n - 3\sqrt{n} + 1} + \sqrt{4n + 1}} \\ &= \frac{-12\sqrt{n} - 1}{2\sqrt{n - 3\sqrt{n} + 1} + \sqrt{4n + 1}}. \end{aligned}$$

Così, per $n \rightarrow \infty$,

$$2\sqrt{n - 3\sqrt{n} + 1} - \sqrt{4n + 1} = \frac{\sqrt{n} \left(-12 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{\sqrt{n} \left(2\sqrt{1 - \frac{3}{\sqrt{n}}} + \sqrt{4 + \frac{1}{\sqrt{n}}} \right)} \rightarrow \frac{-12}{2 + \sqrt{4}} = -3.$$