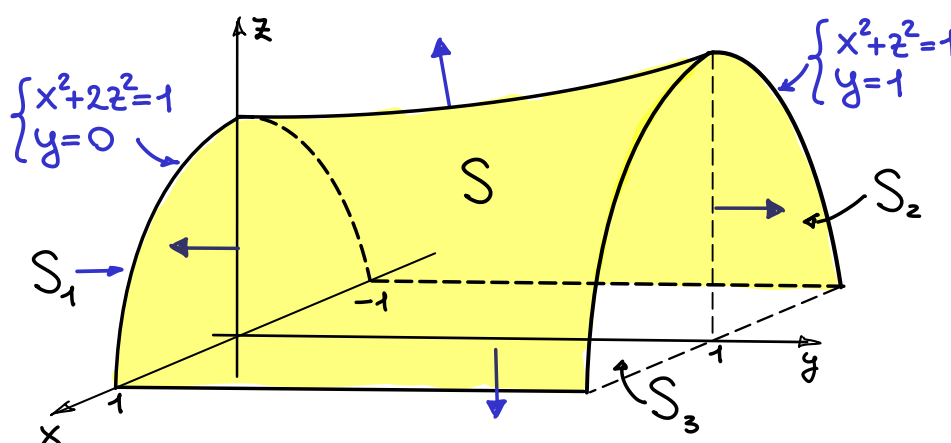


ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 42

ESERCIZI DI RIEPILOGO - PARTE 5

- 21** Calcolare $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F}(x, y, z) = (2xy, -2y^2, 5y + 2yz)$
 e $S = \{(x, y, z) : x^2 + (2-y)z^2 = 1, 0 \leq y \leq 1, z \geq 0\}$.
 S è orientata in modo che $\langle \vec{n}, \vec{k} \rangle \geq 0$ in ogni suo punto.



Notiamo che $\text{div}(\vec{F}) = 2y - 4y + 2y = 0$.

Quindi, per il teorema della divergenza,

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \stackrel{=0}{=} \iiint_D \text{div}(\vec{F}) dx dy dz - \iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

dove D è il solido racchiuso da $S \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$ con

$$S_1 = \{(x, 0, z) : x^2 + 2z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\} \quad \vec{n} = (0, -1, 0),$$

$$S_2 = \{(x, 1, z) : x^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\} \quad \vec{n} = (0, 1, 0),$$

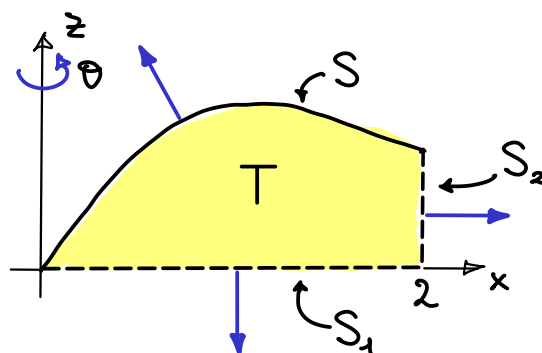
$$S_3 = \{(x, y, 0) : x \in [-1, 1], y \in [0, 1]\} \quad \vec{n} = (0, 0, -1).$$

Così

$$\begin{aligned}\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= - \iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \\ &= - \iint_{S_1} \langle (*, 0, *) , (0, -1, 0) \rangle dS = 0 \\ &\quad - \iint_{S_2} \langle (*, -2, *) , (0, 1, 0) \rangle dS = 2|S_2| = 2\frac{\pi}{2} = \pi \\ &\quad - \iint_{S_3} \langle (*, *, 5y) , (0, 0, -1) \rangle dS = 5 \cdot 2 \cdot \int_0^1 y dy = 5 \\ &= 0 + \pi + 5 = \pi + 5.\end{aligned}$$

22 Calcolare $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z + x^2 + y^2)$ e S è la superficie generata dalla rotazione completa di $C = \{(x, 0, xe^{-x}) : x \in [0, 2]\}$ attorno all'asse z . S è orientata in modo che $\langle \vec{n}, \vec{k} \rangle \geq 0$ in ogni suo punto.

In alternativa al calcolo diretto applichiamo il teorema della divergenza al dominio D ottenuto ruotando



$$T = \{(x, 0, z) : 0 \leq z \leq xe^{-x}, x \in [0, 2]\}.$$

Il bordo di D è dato da $S \cup S_1 \cup S_2$ dove

$$S_1 = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, 0) : \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, 2]\} \quad \text{cerchio}$$

e

$$S_2 = \{(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z) : \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, 2e^{-2}]\} \quad \text{superficie cilindrica}$$

orientate come in figura.

Quindi

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz - \iint_{S_1 \cup S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \\ &= 12\pi(1 - 5e^{-2}) + 8\pi - 16\pi e^{-2} = 20\pi - 76\pi e^{-2}. \end{aligned}$$

Infatti $\operatorname{div}(\vec{F}) = 3$,

$$\iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz = 3 \int_{p=0}^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{z=0}^{pe^{-p}} dz \right) p d\theta dp = 6\pi \int_0^2 p^2 e^{-p} dp$$

$$= 6\pi \left[-e^{-\rho}(\rho^2 + 2\rho + 2) \right]_0^2 = 6\pi(2 - 10e^{-2}) = 12\pi(1 - 5e^{-2}),$$

$$\iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} \langle (x, y, \overset{0}{z} + x^2 + y^2), (0, 0, -1) \rangle dx dy$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^2 (-\rho^2) \cdot \rho d\rho d\theta = 2\pi \left[-\frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 = -8\pi$$

e

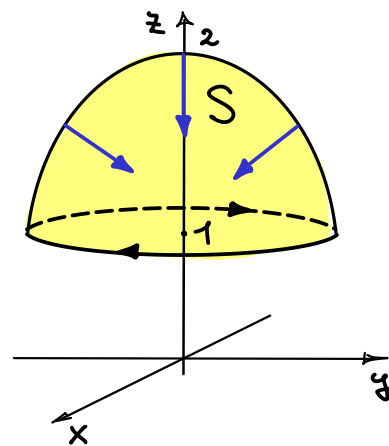
$$\iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{2e^{-2}} \langle (x, y, z + x^2 + y^2), (\cos\theta, \sin\theta, 0) \rangle 2d\theta dz$$

$x = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{2e^{-2}} (2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta) 2d\theta dz$$

$$= 2e^{-2} \cdot 4 \cdot 2\pi = 16\pi e^{-2}.$$

23 Calcolare $\iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle$ sia direttamente che usando il teorema del rotore dove $\vec{F}(x,y,z) = (4y+xz, e^y, xy+z^2)$ e $S = \{(x,y,z) : x^2 + 2y^2 + 2z = 4, z \geq 1\}$.
 S è orientata in modo che $\vec{n} = (0,0,-1)$ in $(0,0,2)$.



Calcolo diretto:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4y+xz & e^y & xy+z^2 \end{bmatrix} = (x, x-y, -4).$$

Parametrizzazione di S :

$$\vec{\sigma}(x,y) = (x, y, 2 - \frac{x^2}{2} - y^2) \text{ con } A = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 \leq 2\}$$

$$x^2 + 2y^2 = 4 - 2z \leq 4 - 2$$

$$\hookrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + y^2 \leq 1$$

Allora $\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (x, 2y, 1)$ che su S

induce l'orientazione tale che $\vec{n} = (0,0,1)$ in $(0,0,2)$ (opposta a quella data). Così

$$\iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = - \iint_A \langle (x, x-y, -4), (x, 2y, 1) \rangle dx dy$$

$$= - \iint_{\{x^2 + 2y^2 \leq 2\}} (x^2 + \overset{x\text{-dispari}}{2xy} - 2y^2 - 4) dx dy$$

simmetrico rispetto a x=0

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \rightarrow - \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 (2\rho^2 \cos^2 \theta - 2\rho^2 \sin^2 \theta - 4) \sqrt{2} \rho d\rho d\theta$$

$$= -2\sqrt{2}\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 + 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 + 4\sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 = 4\sqrt{2}\pi.$$

Per il teorema del rotore

$$\iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle \stackrel{\text{TR}}{=} \int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

dove l'ellisse $\gamma = \partial S$ è orientata in senso orario rispetto all'asse z

$$\vec{\gamma}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sin t, 1) \text{ con } t \in [2\pi, 0].$$

Così

$$= \int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

$$= - \int_0^{2\pi} \langle (\underbrace{4y}_{\sin t} + \underbrace{xz}_{\sqrt{2}\cos t}, \underbrace{e^x}_{\sin t}, xy + z^2), \underbrace{\vec{\gamma}'(t)}_{(-\sqrt{2}\sin t, \cos t, 0)} \rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (4\sqrt{2}\sin^2 t + 2\sin t \cos t - e^{\sin t} \cos t) dt$$

$$= 4\sqrt{2}\pi + \left[\sin^2 t \right]_0^{2\pi} - \left[e^{\sin t} \right]_0^{2\pi}$$

$$= 4\sqrt{2}\pi + 0 + 0 = 4\sqrt{2}\pi.$$

24 Usando il teorema del rotore calcolare
 $\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ con $\vec{F}(x,y,z) = (e^x + y, x^2z + y^2, z^3 - x^2)$
e
 $\vec{\gamma}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 5 + 4\sin t \cos t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

La curva chiusa γ è il
bordo della superficie

$$S = \{(x, y, 5 + xy) : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Parametrizzazione di S :

$$\vec{\sigma}(x,y) = (x, y, 5 + xy) \text{ con } A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

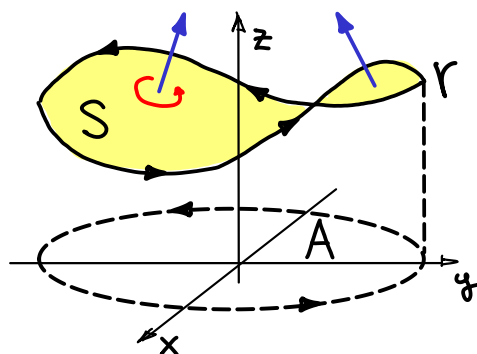
Allora $\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (-y, -x, 1)$. L'orientazione di S
verso l'alto è concorde con l'orientazione
antioraria di γ rispetto all'asse z .

Inoltre

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x + y & x^2z + y^2 & z^3 - x^2 \end{bmatrix} = (-x^2, 2x, 2xz - 1).$$

Così per il teorema del rotore

$$\begin{aligned} \int_{\gamma = \partial S} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle &\stackrel{\text{TR}}{=} \iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle \\ &= \iint_A \langle (-x^2, 2x, 2x\overset{5+xy}{z} - 1), (-y, -x, 1) \rangle dx dy \\ &= \iint_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} (\overset{y\text{-disp}}{x^2y} - 2x^2 + 10x + \overset{x\text{-disp}}{2x^2y} - 1) dx dy \\ &\quad \text{simmetrico rispetto a } x=0 \end{aligned}$$



$$= -2 \iint_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} x^2 dx dy - \iint_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} 1 dx dy$$

$$= -2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^2 \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta - 4\pi$$

$$= -2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 - 4\pi = -8\pi - 4\pi = -12\pi.$$

25 Sia $\vec{F} = (\frac{x}{1+x^2+y^2}, x^3+z, 2)$ e sia

$$D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

con il bordo ∂D orientato verso l'esterno.

Inoltre siano le superfici:

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 2\} \cap \partial D \text{ e } S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z\} \cap \partial D.$$

(a) Calcolare $\iint_{S_1 \cup S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$. (b) Calcolare $\iint_{S_1 \cup S_2} \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle$.

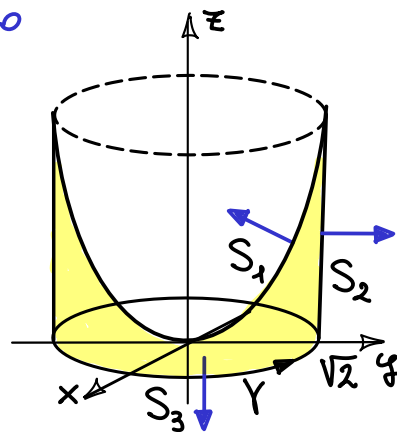
(a) Per il teorema della divergenza

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \stackrel{TD}{=} \iiint_D \text{div}(\vec{F}) dx dy dz - \iint_{S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

integrale = 0 perché D è simmetrico rispetto a y=x

$$= \iiint_D \frac{1 + (y^2 - x^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx dy dz + 2|S_3|$$

$$= \iint_{\{x^2 + y^2 \leq 2\}} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} [z]_0^{x^2 + y^2} dx dy + 4\pi$$



$$\stackrel{CP}{=} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{p^2}{(1+p^2)^2} p dp d\theta + 4\pi = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{p^2 \pm 1}{(1+p^2)^2} p dp + 4\pi$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{2p}{1+p^2} - \frac{2p}{(1+p^2)^2} \right) dp + 4\pi = \pi \left[\log(1+p^2) + \frac{1}{1+p^2} \right]_0^{\sqrt{2}} + 4\pi$$

$$= \frac{10}{3}\pi + \pi \log(3).$$

(b) Per il teorema del rotore

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

dove γ è il bordo di $S_1 \cup S_2$ con l'orientazione indotta

$$\vec{r}(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, 0) \text{ con } t \in [0, 2\pi].$$

Così

$$\begin{aligned} &= \int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{\sqrt{2} \cos t}{1+2}, 2\sqrt{2} \cos^3 t, 2 \right), (-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, 0) \right\rangle dt \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \overbrace{2 \cos t \sin t}^{\sin(2t)} dt + 4 \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt \end{aligned}$$

$$\text{dove } \cos^4 t = (1 - \sin^2 t) \cos^2 t = \cos^2 t - \frac{1}{4} \sin^2(2t)$$

$$= 0 + 4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = 4\pi - \pi = 3\pi.$$

Calcolo alternativo.

$$\begin{aligned} \iint_{S_1 \cup S_2} \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle &\stackrel{=0}{=} \iiint_D \overbrace{\text{div}(\text{rot}(\vec{F}))}^{=0} dx dy dz - \iint_{S_3} \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle \\ &= - \iint_{\{x^2+y^2 \leq 2\}} \langle \text{rot}(\vec{F}), (0, 0, -1) \rangle dx dy \quad \text{basta la componente } z \\ &= \iint_{\{x^2+y^2 \leq 2\}} \left(3x^2 + \overbrace{\left(\frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2} \right)}^{x\text{-dispari}} \right) dx dy \\ &\stackrel{CP}{=} 3 \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho d\theta = 3\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = 3\pi. \end{aligned}$$