

ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 39

ESERCIZI DI RIEPILOGO - PARTE 2

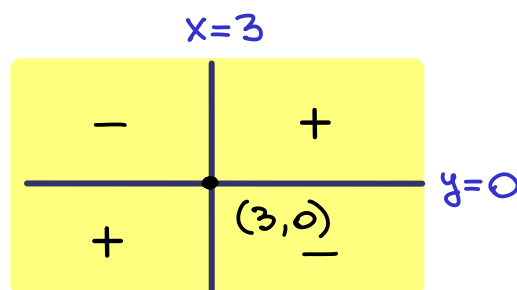
6 Sia $f(x,y) = (x-3)ye^{y-x}$.

Determinare tutti i punti stazionari e la loro natura.

f è superiormente limitata in $\mathbb{R}^2$?

f è inferiormente limitata in $\mathbb{R}^2$?

f è C^∞ in $\mathbb{R}^2$ con segno indicato in figura



Le derivate parziali sono:

$$f_x(x,y) = ye^{y-x} + (x-3)y(-e^{y-x}) = y(4-x)e^{y-x}$$

$$f_y(x,y) = (x-3)e^{y-x} + (x-3)ye^{y-x} = (x-3)(1+y)e^{y-x}$$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} y(4-x)e^{y-x} = 0 \\ (x-3)(1+y)e^{y-x} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$$

$(3,0)$ è un punto di SELLA perché $f(0,0)=0$ e f cambia segno in ogni intorno di $(3,0)$.

Per il punto $(4,-1)$ calcoliamo H_f :

$$f_{xx} = -ye^{y-x} - y(4-x)e^{y-x} = y(x-5)e^{y-x}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = (4-x)e^{y-x} + y(4-x)e^{y-x} = (4-x)(1+y)e^{y-x}$$

$$f_{yy} = (x-3)e^{y-x} + (x-3)(1+y)e^{y-x} = (x-3)(2+y)e^{y-x}$$

Così

$$H_f(4, -1) = e^{-5} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{autovlori} > 0} (4, -1) \text{ è un punto di MINIMO RELATIVO}$$

f non è superiormente limitata in $\mathbb{R}^2$ perché

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t-3)t = +\infty.$$

f non è inferiormente limitata in $\mathbb{R}^2$ perché

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -3te^t = -\infty.$$

7 Sia $f(x, y) = 3xy^2 - x^3$. Determinare

1) i punti stazionari di f e la loro natura,

2) i punti stazionari vincolati di f in

$$\Gamma = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 = 1\},$$

3) il valore massimo e il valore minimo di f in

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + 2y^2 \leq 1\}.$$

$$1) \nabla f(x, y) = (3y^2 - 3x^2, 6xy)$$

$$\begin{cases} 3y^2 - 3x^2 = 0 \\ 6xy = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0) \text{ unico punto stazionario.}$$

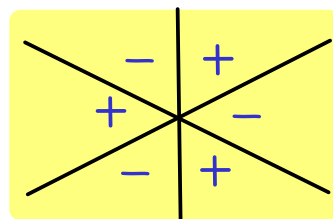
$x=0 \vee y=0$

Si noti che $H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dato che $f(0, 0) = 0$

discutiamo il segno di f in un intorno di $(0, 0)$:

$$f(x, y) = x(3y^2 - x^2) = x(\sqrt{3}y - x)(\sqrt{3}y + x)$$

$(0, 0)$ è un punto di SELLA



2) Sia $g(x,y)=x^2+2y^2-1=0$ allora in Γ

$$\nabla g(x,y)=(2x,4y)=(0,0)$$

e tutti i punti di Γ sono regolari.

Moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y^2 - 3x^2 = \lambda 2x \\ 6xy = \lambda 4y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow y=0 \vee \lambda = \frac{3x}{2}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ -3x^2 = \lambda 2x \\ x^2 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = 3x/2 \\ 3y^2 - 3x^2 = 3x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} y^2 = 2x^2 \\ x^2 + 4x^2 = 1 \\ 5x^2 = 1 \end{matrix}$$

$$(1,0), (-1,0)$$

↑ punti stazionari vincolati $\rightarrow (\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\sqrt{\frac{2}{5}}), (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\sqrt{\frac{2}{5}})$

3) D è compatto e $f \in C^\infty(D)$.

Per 1), D non contiene punti stazionari interni e dunque i punti di massimo/minimo di f in D stanno sul bordo

$$\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \text{ dove}$$

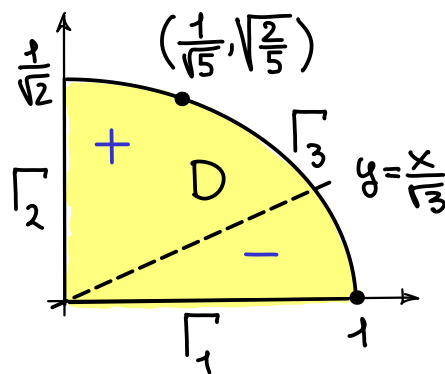
$$\Gamma_1 = \{(x,0) : x \in [0,1]\}$$

$$f(x,0) = -x^3$$

$$f(0,0)=0, f(1,0)=-1$$

$$\Gamma_2 = \{(0,y) : y \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]\} \text{ con } f(0,y)=0$$

$$\text{e } \Gamma_3 = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 = 1, 0 < x < 1, y > 0\}.$$



Per 2) Γ_3 contiene un unico punto stazionario vincolato ossia $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}})$ e

$$f(\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (3 \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{5}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Confrontando i valori trovati segue che

$$\max_D f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \min_D f(x,y) = -1.$$

8 Sia $f(x,y) = e^{xy}$. Determinare

- 1) i punti stazionari di f e la loro natura,
- 2) il valore massimo e il valore minimo di f in

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x + \sqrt{2}, x^2 + 4y^2 \leq 8\}.$$

$$1) \nabla f(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

$$\begin{cases} ye^{xy} = 0 \\ xe^{xy} = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ unico punto stazionario}$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} y^2 e^{xy} & e^{xy} + xy e^{xy} \\ e^{xy} + xy e^{xy} & x^2 e^{xy} \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

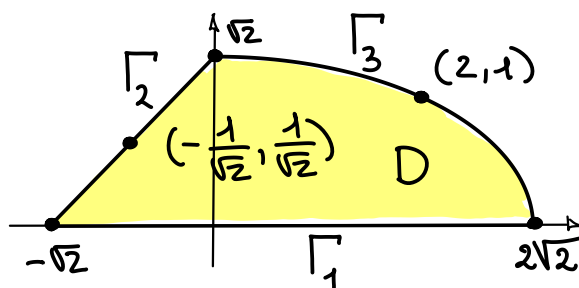
$$\det H_f = -1 < 0$$

$(0,0)$ è un punto di SELLA.

$$2) D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x + \sqrt{2}, \frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} \leq 1\}.$$

D è compatto e $f \in C^\infty(D)$.

Per 1), D non contiene punti stazionari interni e dunque i punti di massimo/minimo

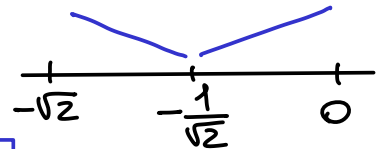


di f in D stanno sul bordo $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ dove

$$\Gamma_1 = \{(x, 0) : x \in [-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]\} \quad \boxed{f(x, 0) = 1}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, x+\sqrt{2}) : x \in (-\sqrt{2}, 0]\}$$

$$f(x, x+\sqrt{2}) = e^{x(x+\sqrt{2})}$$



$$\text{con } \boxed{f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad f(0, \sqrt{2}) = 1}$$

$$\text{e } \Gamma_3 = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 = 8, x > 0, y > 0\}$$

Sia $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 8$ allora in Γ_3

$$\nabla g(x, y) = (2x, 8y) \neq (0, 0)$$

e tutti i punti di Γ_3 sono regolari

Moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} y e^{xy} = \lambda 2x \cdot x \\ x e^{xy} = \lambda 8y \cdot y \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda 2x^2 = \lambda 8y^2 \\ 2\lambda(x^2 - 4y^2) = 0 \\ x^2 = 4y^2 \rightarrow x = \pm 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 2y \\ (\pm 2y)^2 + 4y^2 = 8 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{matrix} \quad (2, 1) \in \Gamma_3$$

$(2, 1)$ è l'unico punto stazionario vincolato in Γ_3

$$\boxed{f(2, 1) = e^2}$$

Confrontando i valori trovati segue che

$$\max_D f(x, y) = e^2 \quad \text{e} \quad \min_D f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

9 Verificare che l'equazione $e^y = 2x + (1+xy)e^x$ definisce implicitamente due funzioni

$$y = \varphi(x) \quad \text{e} \quad x = \psi(y)$$

in un intorno di $(0,0)$ e determinare il polinomio di Taylor di φ in $x_0=0$ di ordine 2.

Quanto vale $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + \varphi(t))^{\frac{1}{\varphi(t)}}$?

Sia $f(x,y) = e^y - 2x - (1+xy)e^x$ allora $f(0,0) = 0$

e per il teorema delle funzioni implicite (TFI)

$$f_y(0,0) \neq 0 \Rightarrow \exists y = \varphi(x) \quad \text{e} \quad f_x(0,0) \neq 0 \Rightarrow \exists x = \psi(y).$$

$$f_x(x,y) = -2 - ye^x - (1+xy)e^x \Rightarrow f_x(0,0) = -2 - 1 = -3 \neq 0$$

$$f_y(x,y) = e^y - xe^x \Rightarrow f_y(0,0) = 1 \neq 0$$

Abbiamo che $\varphi(0) = 0$ e ancora per il TFI

$$\varphi'(0) = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = 3.$$

Inoltre derivando due volte $e^y = 2x + (1+xy)e^x$ si ha

$$e^y \cdot \varphi' = 2 + (\varphi + x\varphi')e^x + (1+x\varphi)e^x$$

e

$$e^y \cdot (\varphi')^2 + e^y \cdot \varphi'' = (2\varphi' + x\varphi'')e^x + 2(\varphi + x\varphi')e^x + (1+x\varphi)e^x$$

$x=0 \rightarrow (3)^2 + \varphi''(0) = (2 \cdot 3 + 0) + 0 + 1 \Rightarrow \varphi''(0) = 7 - 9 = -2$

e quindi il polinomio di Taylor T_2 di φ in 0 è

$$T_2(x) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot x + \frac{1}{2} \varphi''(0) x^2 = 3x - x^2$$

Infine, per $t \rightarrow 0$ si ha

$$\varphi(t) = 3t + o(t) \quad \text{e} \quad \psi(t) = \frac{t}{3} + o(t)$$

$$\psi'(0) = -\frac{f_y(0,0)}{f_x(0,0)} = \frac{1}{3}$$

Così

$$(1+\varphi(t))^{\frac{1}{\psi(t)}} = \exp\left(\frac{\log(1+\varphi(t))}{\psi(t)}\right)$$

$\log(1+x) = x + o(x)$

$$= \exp\left(\frac{3t + o(t)}{\frac{t}{3} + o(t)}\right) = \exp(9 + o(1)) \rightarrow e^9.$$

10 Verificare che il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + (z-2)^2 = 1 \end{cases}$ definisce implicitamente due funzioni

$$y = \varphi(x) \text{ e } z = \psi(x)$$

in un intorno di $(0, 3, 3)$ e determinare il polinomio di Taylor di φ e quello di ψ in $x_0 = 0$ di ordine 2.

Siano

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \text{ e } g(x, y, z) = x^2 + (z-2)^2 - 1.$$

La matrice jacobiana rispetto a y e z è

$$J = \begin{bmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & -2z \\ 0 & 2(z-2) \end{bmatrix} \Rightarrow \det(J) = 4y(z-2).$$

Per $(x, y, z) = (0, 3, 3)$ si ha che $\det(J) = 12 \neq 0$.

Allora per TFI esistono φ, ψ in un intorno di 0 tali che $(x, \varphi(x), \psi(x))$ soddisfa il sistema dato.

Determiniamo i polinomi di Taylor di φ e ψ in 0 di ordine 2:

$$\begin{cases} x^2 + \varphi^2 = \psi^2 \\ x^2 + (\psi - 2)^2 = 1 \end{cases} \xRightarrow{\frac{d}{dx}} \begin{cases} 2x + 2\varphi \cdot \varphi' = 2\psi \cdot \psi' \\ 2x + 2(\psi - 2) \cdot \psi' = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Per $x = 0$ si ha

$$\begin{cases} 0 + 2 \cdot 3 \varphi' = 2 \cdot 3 \psi' \\ 0 + 2(3 - 2) \psi' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi'(0) = 0 \\ \psi'(0) = 0. \end{cases}$$

Derivando ulteriormente (*) si ottiene

$$\begin{cases} 2 + 2\varphi'^2 + 2\varphi\varphi'' = 2\psi'^2 + 2\psi\cdot\psi'' \\ 2 + 2\psi'^2 + 2(\psi-2)\psi'' = 0 \end{cases}$$

Per $x=0$ si ha

$$\begin{cases} 2 + 0 + 6\varphi'' = 0 + 6\psi'' \\ 2 + 0 + 2(3-2)\psi'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi''(0) = -1 \\ \varphi''(0) = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Quindi i polinomi di Taylor richiesti sono

$$\varphi: T_2(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{1}{2}\varphi''(0)x^2 = 3 - \frac{2}{3}x^2$$

$$\psi: T_2(x) = \psi(0) + \psi'(0)x + \frac{1}{2}\psi''(0)x^2 = 3 - \frac{x^2}{2}$$