ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 38

ESERCIZI DI RIEPILOGO - PARTE 1

1 Determinare l'insieme di convergenza per $x \in \mathbb{R}$ della serie
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{kx}}{2^k k(k-1)(e^x-2)^k}$$
e calcolarne la somma per $x=0$.

Poniamo $z = \dfrac{e^x}{e^x-2}$ e studiamo la serie di potenze
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{2^k k(k-1)}.$$

Il raggio di convergenza è
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\cancel{2^k}\,\cancel{k}(k-1)}{2^{k+1}(k+1)\cancel{k}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2} \implies R=2.$$

Agli estremi $z=\pm 2$ si ha che
$$\frac{|\pm 2|^k}{2^k k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)} \sim \frac{1}{k^2}$$
la serie converge perché $2>1$.

e dunque la serie è assolutamente convergente.
Quindi la serie converge se e solo se $|z| \leq 2$.
L'insieme di convergenza rispetto a x è:
$$\begin{cases} -2 \leq \dfrac{e^x}{e^x-2} \leq 2 \\ e^x-2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^x-2>0 \\ e^x \leq 2e^x-4 \end{cases} \cup \begin{cases} e^x-2<0 \\ -2(e^x-2) \geq e^x \end{cases}$$
$$e^x \geq 4 \qquad\qquad 4 \geq 3e^x$$
$$\iff x \in \left(-\infty, \log\left(\tfrac{4}{3}\right)\right] \cup \left[\log(4), +\infty\right).$$

Per $x=0$ la serie diventa

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1/2)^{k-1}}{k-1} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1/2)^k}{k}$$

entrambe convergenti.

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1/2)^k}{k} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1/2)^k}{k}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \left(\log\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

dove ricordiamo che per $z \in (-1,1]$

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-z)^k}{k}.$$

$\boxed{2}$ Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2-1)e^{kx} + \sin(\pi x) k^{-x}}{k+1}$$

è convergente e calcolarne la somma per $x=-1$.

Sia

$$a_k = \frac{(k^2-1)e^{kx} + \sin(\pi x)k^{-x}}{k+1} = (k-1)e^{kx} + \frac{\sin(\pi x)}{(k+1)k^x}.$$

Distinguiamo diversi casi.

1) Se $x>0$ allora $a_k \sim k e^{kx} \to +\infty$

2) Se $x=0$ allora $a_k = k-1 \to +\infty$

In 1) e 2) la serie non converge perché $a_k \not\to 0$.

3) Se $x<0$ e $x\notin\mathbb{Z}$ allora $a_k \sim \overset{\neq 0}{\operatorname{sen}(\pi x)} \cdot \frac{1}{k^{x+1}}$ e la serie non converge perché $x+1<1$

4) Se $x<0$ e $x\in\mathbb{Z}$ allora $a_k=(k-1)e^{kx}$ e la serie converge perché

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k e^{(k+1)x}}{(k-1)e^{kx}} \to e^x<1$$

Quindi l'insieme di convergenza è

$$(-\infty,0)\cap\mathbb{Z}.$$

Se $x=-1$ allora $a_k=(k-1)e^{-k}=(k-1)\cdot(e^{-1})^k$.

Per $|z|<1$ si ha che

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)z^k = z\sum_{k=1}^{\infty}k\,z^{k-1}-\sum_{k=1}^{\infty}z^k = zD\left(\sum_{k=0}^{\infty}z^k\right)-\frac{z}{1-z}$$

$$=zD\left(\frac{1}{1-z}\right)-\frac{z}{1-z}=\frac{z}{(1-z)^2}-\frac{z}{1-z}=\frac{z^2}{(1-z)^2}.$$

Così, ponendo $z=e^{-1}$ si ha che $|z|<1$ e quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)e^{-k}=\frac{e^{-2}}{(1-e^{-1})^2}=\frac{1}{(e-1)^2}.$$

$\boxed{3}$ Disegnare il dominio D della funzione

$$f(x,y)=\frac{\log(3-\sqrt{x^2+y^2-1})}{|x^2-4|+(x+y)^4}$$

e la curva di livello $\{(x,y) : f(x,y)=0\}$.

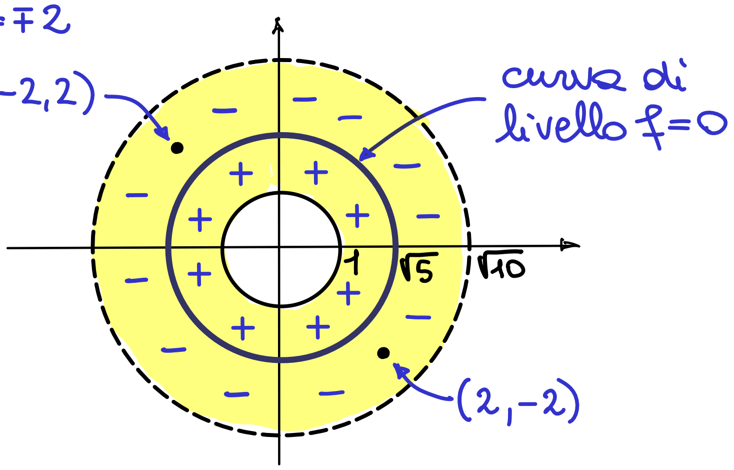
f ammette un punto di minimo assoluto in D?

f ammette un punto di massimo assoluto in D?

Le condizioni da porre per il dominio sono

$$\begin{cases} x^2+y^2-1\geq 0 \\ 3-\sqrt{x^2+y^2-1}>0 \\ x^2-4\neq 0 \ \vee \ x+y\neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\leq x^2+y^2<3^2+1=10 \\ (x,y)\neq(2,-2) \\ (x,y)\neq(-2,2) \end{cases} \to x^2+y^2=8$$

$x\neq\pm 2 \to y\neq\mp 2$



Inoltre $f(x,y)=0$ se e solo se $(x,y)\in D$ e

$$\log(3-\sqrt{x^2+y^2-1})=0 \iff \sqrt{x^2+y^2-1}=2 \iff x^2+y^2=5.$$

Si noti che

$$\lim_{t\to\sqrt{10}^-} f(0,t)=\lim_{t\to\sqrt{10}^-}\frac{\log(\overbrace{3-\sqrt{t^2-1}}^{\to 0^+})}{4+t^4}=-\infty$$

oppure

$$\lim_{(x,y)\to(2,-2)} f(x,y) = \frac{\overset{<0}{\log(3-\sqrt{7})}}{0^+} = -\infty$$

e quindi f non ha punti di minimo assoluto in D.

Inoltre f è continua in D (che non è compatto) e $f(x,y)\geq 0$ se e solo se (x,y) appartiene a

$$C=\{(x,y): 1\leq x^2+y^2\leq 5\}\subseteq D$$

che è un insieme compatto.

Quindi, per il Teorema di Weierstrass, f ha un punto di massimo assoluto (x_0,y_0) in C che è anche un punto di massimo assoluto in D:

$$\left.\begin{array}{ll} f(x_0,y_0)\geq f(x,y) & \forall (x,y)\in C \\ f(x_0,y_0)\geq 0 > f(x,y) & \forall (x,y)\in D\setminus C \end{array}\right\} \forall (x,y)\in D$$

$\boxed{4}$ Calcolare i seguenti limiti

1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3\sqrt{y}+y^3\sqrt{x}}{x^4+|y|^3}$ 2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(\cos(xy))}{x^4+|y|^3}$ 3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^3}$.

1) Il limite non esiste perché se $y=0$ e $x\to 0^+$

$$\frac{x^3\sqrt{y}+y^3\sqrt{x}}{x^4+|y|^3} = \frac{0}{x^4+0} = 0 \to 0$$

limiti diversi

mentre se $y=x^2$ e $x\to 0^+$

$$\frac{x^3\sqrt{y}+y^3\sqrt{x}}{x^4+|y|^3} = \frac{x^4+x^{6+\frac{1}{2}}}{x^4+x^6} \sim \frac{x^4}{x^4} \to 1.$$

2) Per $t \to 0$ si ha che $\cos(t) \sim 1 - \frac{t^2}{2}$ e $\log(1+t) \sim t$.

Quindi $\log(\cos(t)) \sim -\frac{t^2}{2}$ e per $(x,y) \to (0,0)$

$$\frac{\log(\cos(xy))}{x^4+|y|^3} = \underbrace{\left(\frac{\log(\cos(xy))}{x^2y^2}\right)}_{\to -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^2y^2}{x^4+|y|^3}\right)}_{\to 0} \to 0$$

perché

$$0 \leq \frac{x^2y^2}{x^4+|y|^3} = |y|^{1/2} \cdot \left(\frac{x^2 \cdot |y|^{3/2}}{x^4+|y|^3}\right) \leq \frac{1}{2}|y|^{1/2} \to 0$$

$$0 \leq (x^2 - |y|^{3/2})^2 = x^4 + |y|^3 - 2x^2|y|^{3/2} \Rightarrow x^2|y|^{3/2} \leq \frac{1}{2}(x^4+|y|^3)$$

3) Il limite non esiste perché se $y=0$ e $x \to 0^+$

$$\frac{x^2y^2}{x^4+y^3} = \frac{0}{x^4+0} = 0 \to 0$$

limiti diversi

mentre se $y = (-x^4+x^\alpha)^{1/3}$ con $\alpha > 4$ e $x \to 0^+$

$$\frac{x^2y^2}{x^4+y^3} \sim \frac{x^2 \cdot (-x^{4/3})^2}{\cancel{x^4}+(-\cancel{x^4}+x^\alpha)} = x^{2+\frac{8}{3}-\alpha} = x^{\frac{14}{3}-\alpha} \xrightarrow[\alpha = \frac{14}{3} > 4]{} 1$$

OSSERVAZIONE

Più in generale se $a,b,c,d > 0$ allora

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^a|y|^b}{|x|^c+|y|^d} = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{a}{c}+\frac{b}{d} > 1 \\ \nexists & \text{se } \frac{a}{c}+\frac{b}{d} \leq 1 \end{cases}$$

Infatti se $\frac{a}{c}+\frac{b}{d} > 1$ sia $r = |x|^c+|y|^d$ allora

$$|x|^a = (|x|^c)^{a/c} \leq r^{a/c} \quad \text{e} \quad |y|^b = (|y|^d)^{b/d} \leq r^{b/d}$$

Così

$$0 \leq \frac{|x|^a|y|^b}{|x|^c+|y|^d} \leq \frac{r^{a/c} \cdot r^{b/d}}{r} = r^{\overbrace{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{d}-1\right)}^{>0}} \xrightarrow[\text{per } (x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Se invece $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}\leq 1$ abbiamo che

1) per $x=t$ e $y=0$ con $t>0$

$$\frac{|x|^a|y|^b}{|x|^c+|y|^d}=\frac{t^a\cdot 0}{t^c+0}=0\xrightarrow{t\to 0^+}0$$

limiti diversi

2) per $x=t^{1/c}$ e $y=t^{1/d}$ con $t>0$

$$\frac{|x|^a|y|^b}{|x|^c+|y|^d}=\frac{t^{a/c}\cdot t^{b/d}}{t+t}=\frac{1}{2}t^{\frac{a}{c}+\frac{b}{d}-1}\xrightarrow{t\to 0^+}\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{se } \frac{a}{c}+\frac{b}{d}=1\\ +\infty & \text{se } \frac{a}{c}+\frac{b}{d}<1\end{cases}$$

$\boxed{5}$ Verificare che

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^3-3y^5}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

è continua in $(0,0)$. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $(0,0)$.
f è differenziabile in $(0,0)$?

Per $(x,y)\to(0,0)$ con $(x,y)\neq(0,0)$

$$|f(x,y)|\leq\frac{2|x|^3}{x^2+y^4}+\frac{3|y|^5}{x^2+y^4}\leq 2\frac{|x|^3}{x^2}+3\frac{|y|^5}{y^4}=\underbrace{2|x|+3|y|}_{\to 0=f(0,0)}$$

e quindi f è continua in $(0,0)$.

Derivate parziali in $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{2t^3}{t^2}=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{-3t^5}{t^4}=-3.$$

Differenziabilità in (0,0):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\langle\nabla f(0,0),(x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}}=0?$$

Si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{2x^3-3y^5}{x^2+y^4}-0-(2x-3y)\right)$$

$$\frac{\cancel{2x^3}-\cancel{3y^5}-\cancel{2x^3}+3x^2y-2xy^4+\cancel{3y^5}}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^4)}$$

Lungo la retta $y=x$ si ha che per $x\to0^+$

$$\frac{3x^3-2x^5}{\sqrt{2}\cdot x(x^2+x^4)}\sim\frac{3\cancel{x^3}}{\sqrt{2}\cancel{x^3}}\longrightarrow\frac{3}{\sqrt{2}}\neq0$$

e quindi f non è differenziabile in (0,0).