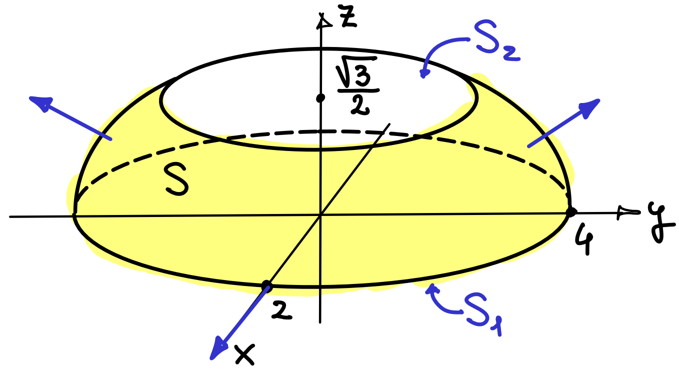
ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 36

ESEMPI

• Calcolare $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F}=(y^2, x, z^2+1)$ e

$$S=\left\{(x,y,z): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+z^2=1,\ 0\le z\le \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

orientata in modo che $\vec{n}=(1,0,0)$ in $(2,0,0)$.



S è la parte di ellissoide centrato in $(0,0,0)$ e semiassi 2, 4 e 1 compreso tra i piani $z=0$ e $z=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

In alternativa al calcolo diretto applichiamo il teorema della divergenza chiudendo S con

$$S_1=\left\{(x,y,0): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+0^2\le 1\right\} \text{ con } \vec{n}=(0,0,-1)$$

e

$$S_2=\left\{\left(x,y,\frac{\sqrt{3}}{2}\right): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\le 1\right\} \text{ con } \vec{n}=(0,0,1)$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}\le 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \iff x^2+\frac{y^2}{4}\le 1$$ ellisse con semiassi 1 e 2

Posto

$$D=\left\{(x,y,z): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+z^2\le 1,\ 0\le z\le \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

allora $\partial^+ D = S_1\cup S_2\cup S$ con le orientazioni descritte è

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \overset{TD}{=} \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F})\,dx\,dy\,dz - \iint_{S_1 \cup S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

$$= \frac{15\pi}{4} - \Big(\underbrace{\frac{7\pi}{2}}_{S_2} - \underbrace{8\pi}_{S_1}\Big) = \frac{33}{4}\pi .$$

Infatti

$$\iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{S_1} \langle (y^2, x, \overset{\overset{0}{\parallel}}{z^2} + 1), (0,0,-1) \rangle\, dS$$

$$= -|S_1| = -\pi \cdot 4 \cdot 2 = -8\pi ,$$

$$\iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{S_2} \langle (y^2, x, \underset{\underset{(\sqrt{3}/2)}{\parallel}}{z^2} + 1), (0,0,1) \rangle\, dS$$

$$= \Big(\frac{3}{4} + 1\Big)|S_2| = \frac{7}{4} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 1 = \frac{7\pi}{2} ,$$

e infine

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2+1) = 0 + 0 + 2z .$$

$$\iiint_D \operatorname{div}(\vec{F})\,dx\,dy\,dz \underset{\text{per sezioni}}{=} \int_{z=0}^{\sqrt{3}/2} 2z \Big(\iint_{S_z} dx\,dy\Big) dz = 2\int_0^{\sqrt{3}/2} z\,|S_z|\,dz$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + z^2 \le 1 \iff \frac{x^2}{4(1-z^2)} + \frac{y^2}{16(1-z^2)} \le 1$$ ellisse con semiassi $2\sqrt{1-z^2}$ e $4\sqrt{1-z^2}$

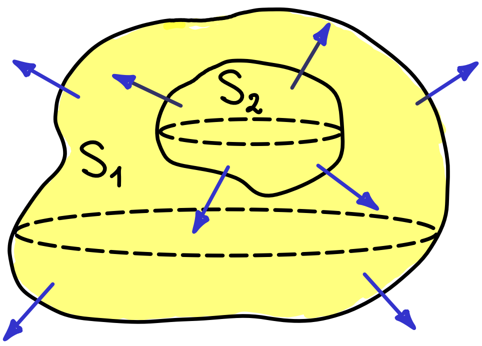
$$= 2\int_0^{\sqrt{3}/2} z \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4(1-z^2)\,dz = 16\pi \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}/2}$$

$$= 16\pi \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{2} - \frac{3/4}{4}\Big) = \frac{15\pi}{4} .$$

OSSERVAZIONE SUL CASO $\operatorname{div}(\vec{F})=0$.

Siano S_1 e S_2 due superfici regolari a pezzi e orientabili e siano D_1 e D_2 i solidi di cui S_1 e S_2 sono i rispettivi bordi.

Supponiamo che S_1 e S_2 siano orientati verso l'esterno e che $D_1 \supseteq D_2$.



spazio compreso tra S_1 e S_2

Inoltre sia $\vec{F}$ un campo vettoriale C^1 in $D = D_1 \setminus D_2$ tale che $\operatorname{div}(\vec{F})=0$ in D. Allora

meno

$$\iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \quad (*)$$

Infatti se si applica il teorema della divergenza rispetto a D si ha

$$\iiint_D \underbrace{\operatorname{div}(\vec{F})}_{\overset{\shortparallel}{0}} dx\,dy\,dz \overset{TD}{=} \iint_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

$$= \iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle + \iint_{S_2^-} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

$\leftarrow$ orientazione opposta a quella data

$$= \iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle - \iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

da cui segue $(*)$.

• Calcolare $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F} = \dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ ← campo centrale

e S è una superficie chiusa orientata verso l'esterno che non passa per l'origine.

Posto $r(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ notiamo che

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)$$

$$= \frac{1}{r^3} + x\left(-3r^{-4} \cdot \frac{x}{r}\right) + \frac{1}{r^3} + y\left(-3r^{-4} \cdot \frac{y}{r}\right) + \frac{1}{r^3} + z\left(-3r^{-4} \cdot \frac{z}{r}\right)$$

$$= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}(x^2+y^2+z^2) = 0 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}.$$

1) Se la superficie chiusa S non contiene al suo interno l'origine

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iiint_D \underbrace{\operatorname{div}(\vec{F})}_{=0} \, dx\,dy\,dz = 0$$

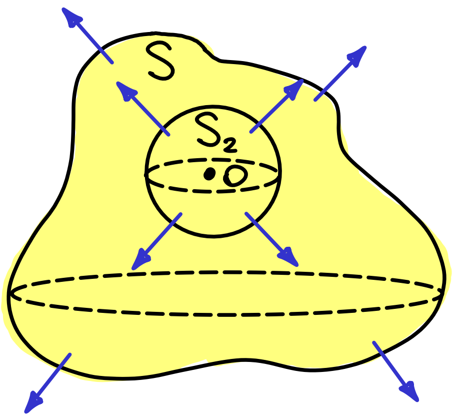
dove D è tale che $\partial^+ D = S$.

2) Se la superficie chiusa S contiene al suo interno l'origine allora sia S_2 una sfera centrata in $(0,0,0)$ di raggio $r>0$ sufficientemente piccolo in modo che S_2 stia all'interno di S. Allora per l'osservazione precedente

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{S_2} \left\langle \frac{\vec{n}}{r^2}, \vec{n} \right\rangle dS$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot |S_2| = \frac{4\pi \cancel{r^2}}{\cancel{r^2}} = 4\pi.$$

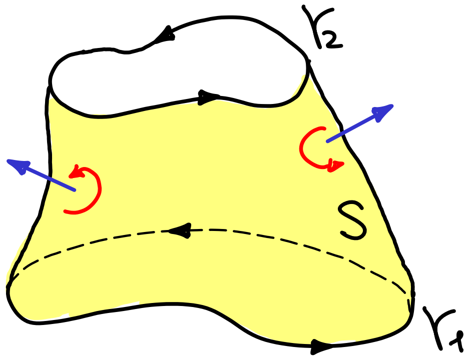
indipendente dal raggio r



OSSERVAZIONE SUL CASO $rot(\vec{F})=\vec{0}$

In $\mathbb{R}^3$ siano γ_1 e γ_2 i sostegni di due curve chiuse, semplici e disgiunte tali che ci sia una superficie S con bordo $\partial S=\gamma_1\cup\gamma_2$.

Supponiamo che S, γ_1 e γ_2 siano orientate come in figura così $\partial^+ S=\gamma_1\cup\gamma_2^-$.



Inoltre sia $\vec{F}$ un campo vettoriale C^1 in S tale che $rot(\vec{F})=\vec{0}$ in S ossia $\vec{F}$ è irrotazionale in S.

Allora

$$\int_{\gamma_1}\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle=\int_{\gamma_2}\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle \quad (*)$$

Infatti se si applica il teorema del rotore rispetto a S si ha

$$0=\iint_S\langle \underbrace{rot(\vec{F})}_{=\vec{0}},d\vec{S}\rangle \overset{TR}{=} \int_{\partial^+ S=\gamma_1\cup\gamma_2^-}\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle$$

$$=\int_{\gamma_1}\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle+\int_{\gamma_2^-}\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle$$

$$=\int_{\gamma_1}\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle-\int_{\gamma_2}\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle$$

da cui segue $(*)$.

• Calcolare $\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove $\vec{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ e $\vec{\gamma}$ è una curva chiusa, semplice e orientata che non interseca l'asse z.

Si verifica che per ogni (x,y,z) in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$ ← non semplicemente connesso

$\{\text{asse } z\} = \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Allora si estende un risultato visto in $\mathbb{R}^2$.

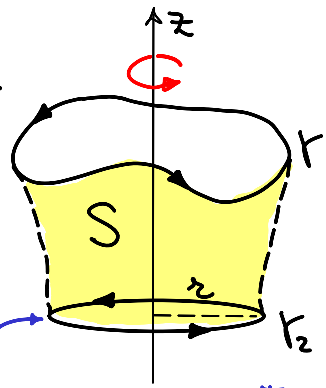
1) Se $\vec{\gamma}$ non si "avvolge" intorno all'asse z allora

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = 0.$$

γ è contenuta in un aperto semplicemente connesso contenuto in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$

2) Se $\vec{\gamma}$ si "avvolge" intorno all'asse z allora

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \begin{cases} +2\pi & \text{se il verso di } \vec{\gamma} \text{ è antiorario rispetto all'asse } z \\ -2\pi & \text{se il verso di } \vec{\gamma} \text{ è orario rispetto all'asse } z \end{cases}$$



circonferenza con centro lungo l'asse z, raggio $r>0$, contenuta in un piano ortogonale all'asse z

Infatti per l'osservazione precedente se $\vec{\gamma}$ è antiorario

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(-\frac{r\sin t}{r^2}, \frac{r\cos t}{r^2}, 0\right), (-r\sin t, r\cos t, 0) \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$$

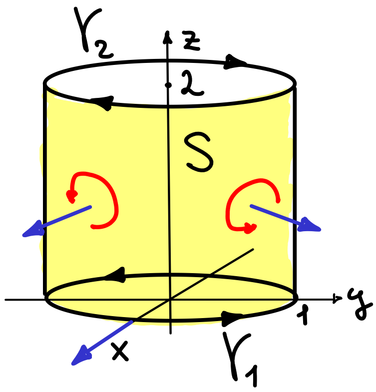
indipendente dal raggio r

dove $\vec{\gamma}_2(t) = (r\cos t, r\sin t, z_0)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

• Calcolare $\iint_S \langle \operatorname{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F} = \frac{(-y, x, z)}{x^2+y^2+z^2}$

e $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2=1,\ z \in [0,2]\}$. S è orientata in modo che $\vec{n} = (1,0,0)$ in $(1,0,0)$.

In alternativa al calcolo diretto si può applicare il teorema del rotore:



$$\iint_S \langle \operatorname{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle \overset{TR}{=} \int_{\partial^+ S = \gamma_1 \cup \gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

$$= \int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle + \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\operatorname{sen} t}{1+0}(-\operatorname{sen} t) + \frac{\cos t}{1+0}(\cos t) + 0 \right) dt$$

$$+ \int_{2\pi}^{0} \left(-\frac{\operatorname{sen} t}{1+2^2}(-\operatorname{sen} t) + \frac{\cos t}{1+2^2}(\cos t) + 0 \right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,dt - \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} 1\,dt = \frac{8\pi}{5}$$

dove $\vec{\gamma}_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$,

$\vec{\gamma}_2(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$ con $t \in [2\pi, 0]$.

orientazione oraria