

# ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 35

## TEOREMA DEL ROTORE

Il teorema del rotore mette in relazione integrali di flusso e integrali curvilinei di seconda specie.

### TEOREMA (DEL ROTORE O DI STOKES)

Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie regolare a pezzi e orientata e sia  $\vec{F}$  un campo vettoriale  $C^1$  in  $S$ .

Allora

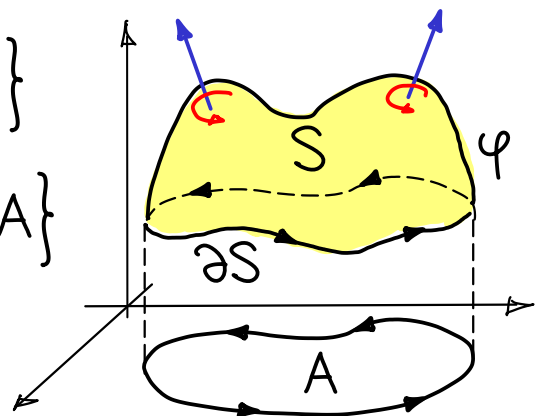
$$\iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \int_{\partial^+ S} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

dove con  $\partial^+ S$  si intende che le curve chiuse date dal bordo di  $S$  hanno l'orientazione positiva indotta dall'orientazione di  $S$ .

dim. Consideriamo prima il caso in cui  $S$  sia data da un solo "pezzo". Per semplicità supponiamo che  $S$  sia una superficie cartesiana e che  $\partial S$  sia il sostegno di una curva:

$$S = \{(x, y, z) : z = \varphi(x, y), (x, y) \in A\}$$

$$\partial S = \{(x, y, z) : z = \varphi(x, y), (x, y) \in \partial A\}$$



dove  $\varphi \in C^2(A)$  e  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  è un insieme semplice.

Parametrizzazione di S:

$$\vec{\sigma}(x,y) = (x,y,\varphi(x,y)) \text{ con } (x,y) \in A.$$

Parametrizzazione di  $\partial^+ S$ :

$\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t), \varphi(x(t), y(t)))$  con  $t \in [a, b]$   
 dove  $[a, b] \ni t \rightarrow (x(t), y(t))$  è una parametrizzazione di  $\partial^+ A$ . Partiamo dall'integrale curvilineo e arriviamo al flusso:

$$\int_{\partial^+ S} \langle \vec{F}, d\vec{\sigma} \rangle = \int_a^b \langle (F_1, F_2, F_3), (x', y', \underbrace{\frac{d}{dt}(\varphi(x(t), y(t)))}_{\leftarrow}) \rangle dt$$

$F_i = F_i(x(t), y(t), \varphi(x(t), y(t)))$  per  $i=1,2,3$

$$= \int_a^b \langle (F_1 + F_3 \varphi_x, F_2 + F_3 \varphi_y), (x', y') \rangle dt$$

$$= \int_{\partial^+ A} \langle (F_1 + F_3 \varphi_x, F_2 + F_3 \varphi_y), d\vec{\sigma} \rangle$$

$$\stackrel{ca}{=} \iint_A \left( \frac{\partial}{\partial x} (F_2 + F_3 \varphi_y) - \frac{\partial}{\partial y} (F_1 + F_3 \varphi_x) \right) dx dy$$

$F_i = F_i(x, y, \varphi(x, y))$  per  $i=1,2,3$

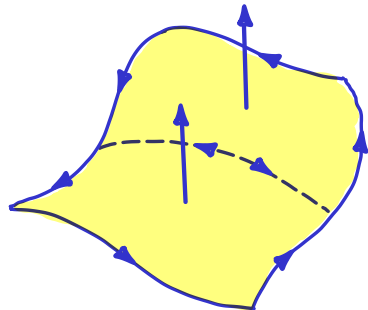
$$= \iint_A \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \varphi_x + \left( \frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \varphi_x \right) \varphi_y + F_3 \varphi_{yx} \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \varphi_y + \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \varphi_y \right) \varphi_x + F_3 \varphi_{xy} \right) \right) dx dy$$

$$= \iint_A \langle \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right), (-\varphi_x, -\varphi_y, 1) \rangle dx dy$$

$$= \iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle. \quad d\vec{S} = (-\varphi_x, -\varphi_y, 1) dx dy$$

Per estendere quanto dimostrato a una superficie regolare a pezzi e orientata  $S = S_1 \cup \dots \cup S_N$ , con  $\partial^+ S = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_M$  basta osservare che

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle &= \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\partial^+ S_i} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \sum_{j=1}^M \int_{\gamma_j} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\partial^+ S} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle. \end{aligned}$$



gli integrali curvilinei lungo le curve in comune vengono calcolati per entrambe le direzioni e il loro contributo totale è nullo



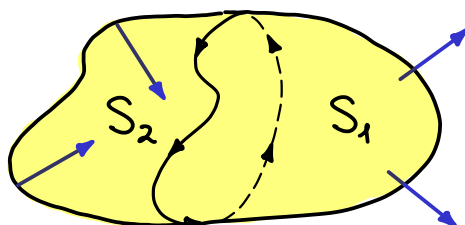
### OSSERVAZIONE

Se  $S$  è una superficie chiusa allora  $\partial S = \emptyset$  e

$$\iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle \stackrel{\text{TR}}{=} 0.$$

Se  $S_1$  e  $S_2$  sono due superfici orientate tali che  $\partial^+ S_1 = \partial^+ S_2$  con la stessa orientazione indotta allora

$$\iint_{S_1} \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle \stackrel{\text{TR}}{=} \int_{\partial^+ S_1 = \partial^+ S_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \stackrel{\text{TR}}{=} \iint_{S_2} \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle.$$

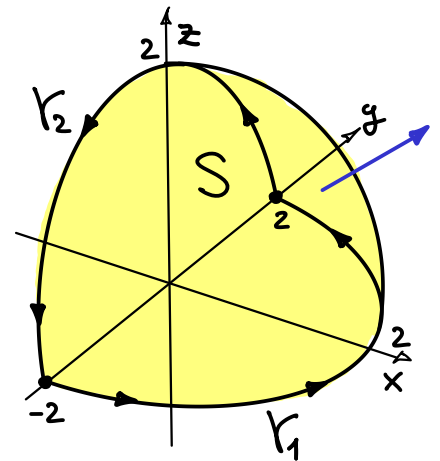


## ESEMPI

• Calcolare  $\iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle$

dove  $\vec{F} = (x^2, z, x+3y)$  e

$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, z \geq 0\}$   
orientata verso l'alto.



1) Calcolo diretto.

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & z & x+3y \end{bmatrix} = (2, -1, 0)$$

Parametrizzazione di S:

$$\vec{\sigma}(\theta, \varphi) = 2(\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi) = 2\vec{m} \quad \leftarrow \text{vettore esterno}$$

con  $(\theta, \varphi) \in A = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ . Allora

$$\vec{\sigma}_\theta \times \vec{\sigma}_\varphi = -4 \stackrel{=R^2}{\sin\varphi} \vec{m} \quad \text{opposta all'orientazione data}$$

e quindi

$$\iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \iint_A \langle (2, -1, 0), 4\sin\varphi \vec{m} \rangle d\theta d\varphi$$

$$= 4 \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta \sin^2\varphi - \sin\theta \sin^2\varphi) d\theta d\varphi$$

*theta-pair                      theta-dispari*

$$= 16 \left[ \sin\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi = 16 \cdot \frac{\pi}{4} = 4\pi.$$

2) Calcolo usando il teorema del rotore.

Il bordo di S è costituito dalle semicirconferenze

$\gamma_1$  e  $\gamma_2$  con l'orientazione indicata in figura.

Coni

$$\vec{\gamma}_1(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0) \text{ con } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

e

$$\vec{\gamma}_2(t) = (0, 2\cos t, 2\sin t) \text{ con } t \in [0, \pi].$$

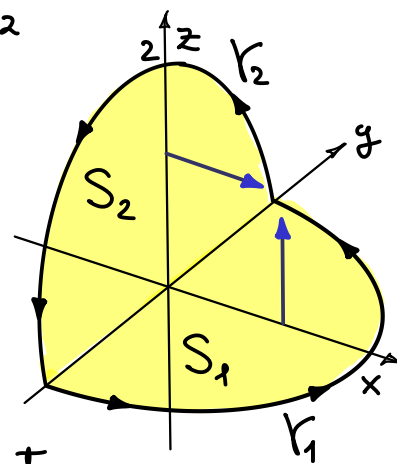
Allora

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle &\stackrel{\text{TR}}{=} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle & \vec{F} &= (x^2, 0, 0) + (0, z, x+3y) \\ & & & \uparrow \text{conservativo} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \langle (0, \overset{\circ}{z}, x+3y), (-2\sin t, 2\cos t, 0) \rangle dt \\ &\quad + \int_0^{\pi} \langle (0, \overset{\circ}{z}, x+3y), (0, -2\sin t, 2\cos t) \rangle dt \\ &= 0 + \int_0^{\pi} (-4\sin^2 t + 12\cos^2 t) dt = -4\frac{\pi}{2} + 12\frac{\pi}{2} = 4\pi. \end{aligned}$$

3) Consideriamo la superficie  $S_1 \cup S_2$  orientata come in figura che ha lo stesso bordo di  $S$ .

$$S_1 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\},$$

$$S_2 = \{(0, y, z) : y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}.$$



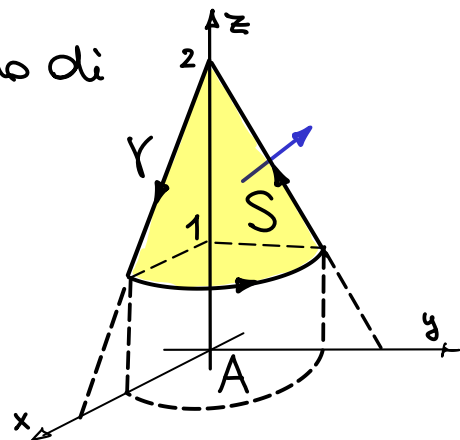
Allora per l'osservazione precedente

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle &= \iint_{S_1 \cup S_2} \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle \\ &= \iint_{S_1} \langle (2, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle dS + \iint_{S_2} \langle (2, -1, 0), (1, 0, 0) \rangle dS \\ &= 0 + 2|S_2| = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 4\pi. \end{aligned}$$

• Calcolare  $\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$  dove  $\vec{F} = \left(\frac{1}{z}, 3x^2 - 4z, z^2\right)$  e  $\gamma$  è la curva chiusa data dal bordo di

$$S = \left\{ (x, y, z) : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, x, y \geq 0, z \geq 1 \right\}$$

L'orientazione di  $\gamma$  è quella indicata in figura.



In alternativa al calcolo diretto applichiamo il teorema del rotore.  $S$  è parametrizzata da

$$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, 2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \text{ con } A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}.$$

Allora

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \text{ compatibile con l'orientazione di } \gamma$$

Inoltre

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{z} & 3x^2 - 4z & z^2 \end{bmatrix} = \left( 4, -\frac{1}{z^2}, 6x \right).$$

Così

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \stackrel{TR}{=} \iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \iint_A \left( \frac{4x - \frac{y}{z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 6x \right) dx dy$$

$$\stackrel{CP}{=} \int_{\rho=0}^1 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left( 4 \cos \theta - \frac{\sin \theta}{(2-\rho)^2} + 6\rho \cos \theta \right) d\theta \rho d\rho$$

$$= \int_0^1 \left( 4\rho - \left( \frac{\rho}{(2-\rho)^2} \right) + 6\rho^2 \right) d\rho \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 1$$

$$= \left[ 2\rho^2 - \log|\rho-2| + \frac{2}{\rho-2} + 2\rho^3 \right]_0^1 = 3 + \log(2).$$