ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 33

INTEGRALI DI FLUSSO

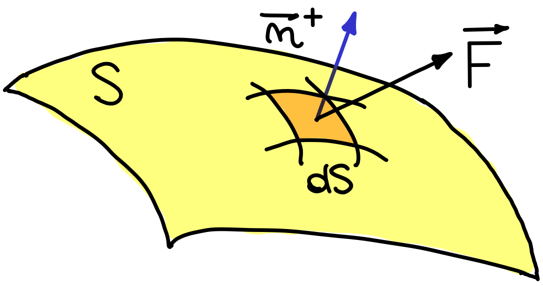
Sia $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo in $D \subseteq \mathbb{R}^3$ e sia $\vec{\sigma}: A \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientata tale che D contiene S, il sostegno di $\vec{\sigma}$.
Allora il FLUSSO DI $\vec{F}$ ATTRAVERSO S è definito come

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_A \langle \vec{F}(\vec{\sigma}(u,v)), \vec{\sigma}_u(u,v) \times \vec{\sigma}_v(u,v) \rangle \, du\, dv$$

dove

$$d\vec{S} = \vec{n}^+ dS = \frac{\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v}{\cancel{\|\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v\|}} \cancel{\|\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v\|} \, du\, dv$$

è l'elemento infinitesimo d'area orientato e
$\vec{n}^+ = \dfrac{\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v}{\|\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v\|}$ è il versore normale a S che determina l'orientazione della superficie.



Se $S = S_1 \cup \ldots \cup S_N$ è una superficie regolare a pezzi e orientata si pone

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \sum_{i=1}^{N} \iint_{S_i} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle .$$

OSSERVAZIONE

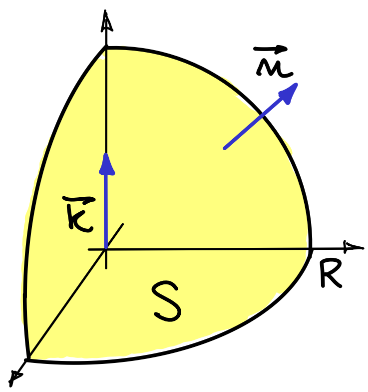
Se $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$ sono due parametrizzazioni dello stesso sostegno $S_1 = S_2$ allora

$$\iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$ se le orientazioni di $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$ sono uguali

$$\iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = -\iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$ se le orientazioni di $\vec{\sigma}_1$ e $\vec{\sigma}_2$ sono opposte

ESEMPI

- Calcolare $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F} = (0, z, 0)$ e $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = R^2, x,y,z \geq 0\}$ con $R > 0$ orientata in modo che $\langle \vec{n}, \vec{k} \rangle \geq 0$.



1) Parametrizzazione cartesiana:

$$\vec{\sigma}(x,y) = (x, y, \sqrt{R^2-x^2-y^2}) \text{ con } A = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq R^2, x,y \geq 0\}.$$

Allora

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \underbrace{1}_{>0} \right) \Rightarrow \langle \vec{n}^+, \vec{k} \rangle \geq 0.$$

Così

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_A \langle \vec{F}(\vec{\sigma}(x,y)), \vec{\sigma}_x(x,y) \times \vec{\sigma}_y(x,y) \rangle dxdy$$

$$= \iint_A \overbrace{z}^{=\sqrt{R-x^2-y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dxdy = \iint_A y\, dxdy$$

$$\overset{CP}{=} \int_{\rho=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \rho \sin\theta \cdot (\rho\, d\rho\, d\theta) = \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^R \cdot \left[-\cos\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{3}.$$

2) Parametrizzazione in coordinate sferiche

$$\vec{\sigma}(\theta,\varphi)=R(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ \cos\varphi)$$

con $A=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Allora

$$\vec{\sigma}_\theta\times\vec{\sigma}_\varphi=-R^2\,\mathrm{sen}\,\varphi(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ \cos\varphi)$$

$$\vec{n}^{+}=-(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ \cos\varphi)\Rightarrow\langle\vec{n}^{+},\vec{k}\rangle=-\cos\varphi\leq 0.$$

Quindi

l'orientazione indotta da $\vec{\sigma}$ è opposta

$$\iint_S\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=-\iint_A\langle\vec{F}(\vec{\sigma}(\theta,\varphi)),\vec{\sigma}_\theta(\theta,\varphi)\times\vec{\sigma}_\varphi(\theta,\varphi)\rangle\,d\theta\,d\varphi$$

$$=+\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\overset{R\cos\varphi}{\overset{\shortparallel}{z}}\cdot(+R^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cdot\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,d\theta\,d\varphi$$

$$=R^3\cdot\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{\mathrm{sen}^3\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{R^3}{3}.$$

campo centrale

- Calcolare $\iint_S\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle$ dove $\vec{F}=\dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2}}$ con $\alpha>0$

e $S=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=R^2\}$ è orientata verso l'esterno.

Per ogni $(x,y,z)\in S$ si ha che $\vec{n}=\dfrac{(x,y,z)}{R}$ e

$$\langle\vec{F},\vec{n}\rangle=\left\langle\frac{(x,y,z)}{R^\alpha},\frac{(x,y,z)}{R}\right\rangle=\frac{R^2}{R^{\alpha+1}}=\frac{1}{R^{\alpha-1}}$$

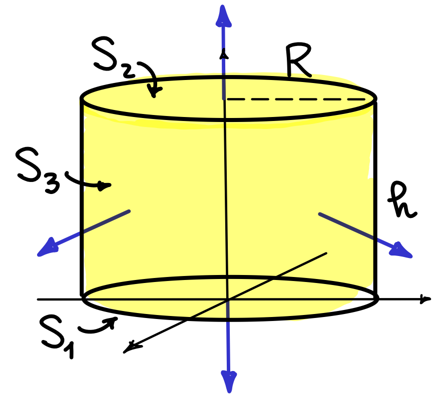
Quindi

$$\iint_S\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=\iint_S\langle\vec{F},\vec{n}\rangle\,dS=\frac{1}{R^{\alpha-1}}\overset{|S|=4\pi R^2}{\overset{\shortparallel}{\iint_S dS}}=4\pi R^{3-\alpha}.$$

Se $\alpha=3$ il flusso è indipendente dal raggio R.

- Calcolare $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F}=(x, x^2, z^2)$ e $S=\partial D$ con $D=\{(x,y,z): x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$.

S è orientata verso l'esterno.



S è una superficie chiusa e regolare a pezzi composta dalle superfici S_1, S_2, S_3.

$S_1=\{(x,y,0): x^2+y^2 \leq R^2\}$ base inferiore

$S_2=\{(x,y,h): x^2+y^2 \leq R^2\}$ base superiore

$S_3=\{(x,y,z): x^2+y^2=R^2, z \in [0,h]\}$ superficie laterale

1) Parametrizzazione di S_1:

$\vec{\sigma}(x,y)=(x,y,0)$ con $A=\{(x,y): x^2+y^2 \leq R^2\}$

$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y=(0,0,1)=\vec{n}^+$ normale esterna $(0,0,-1)$ è opposta

Flusso attraverso S_1:

orientazione

$$\iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = -\iint_A \langle (x, x^2, \underbrace{z^2}_{z=0}), (0,0,1) \rangle dx dy = -\iint_A 0 \, dx dy = 0.$$

2) Parametrizzazione di S_2:

$\vec{\sigma}(x,y)=(x,y,h)$ con $A=\{(x,y): x^2+y^2 \leq R^2\}$

$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y=(0,0,1)=\vec{n}^+$ normale esterna

Flusso attraverso S_2:

$$\iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_A \langle (x, x^2, \underbrace{z^2}_{z=h}), (0,0,1) \rangle dx dy = \iint_A h^2 dx dy = \pi R^2 \cdot h^2.$$

3) Parametrizzazione di S_3:

$\vec{\sigma}(\theta,z)=(R\cos\theta, R\sin\theta, z)$ con $A=[0,2\pi]\times[0,h]$.

$\vec{\sigma}_\theta\times\vec{\sigma}_z=(R\cos\theta,R\sin\theta,0)$, $\vec{n}^+=(\cos\theta,\sin\theta,0)$ normale esterna

Flusso attraverso S_3:

$$\iint_{S_3}\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=\iint_A\langle(x,x^2,z^2),(R\cos\theta,R\sin\theta,0)\rangle d\theta dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^h(R^2\cos^2\theta+R^3\cos^2\theta\sin\theta+0)d\theta dz$$

$$=R^2h\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta+R^3h\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi}=\pi R^2h+0.$$

Quindi il flusso uscente attraverso S è

$$\iint_S\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=\sum_{i=1}^3\iint_{S_i}\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=0+\pi R^2h^2+\pi R^2h=\pi R^2h(1+h).$$

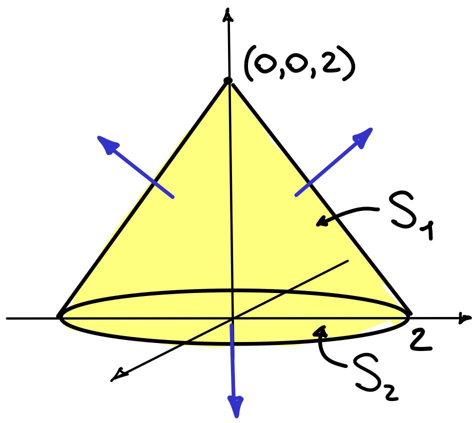
- Calcolare $\iint_S\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle$ dove $\vec{F}=(1,yz,1)$ e $S=\partial D$ con
$$D=\{(x,y,z):\ 0\le z\le 2-\sqrt{x^2+y^2}\}.$$

S è orientata verso l'esterno.

S è una superficie chiusa e regolare a pezzi composta dalle superfici S_1 e S_2.

$S_3=\{(x,y,z):\ 0\le z=2-\sqrt{x^2+y^2}\}$

$S_2=\{(x,y,0):\ x^2+y^2\le 4\}$



1) Parametrizzazione di S_1:

$$\vec{\sigma}(x,y)=(x,y,2-\sqrt{x^2+y^2}) \text{ con } A=\{(x,y):x^2+y^2\le 4\}.$$

Allora

$$\vec{\sigma_x}\times\vec{\sigma_y}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)$$

e quindi il flusso è

$$\iint_{S_1}\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=\iint_A\Big(\overbrace{\frac{1\cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{x\text{-dispari}}+\frac{y\overbrace{z}^{2-\sqrt{x^2+y^2}}\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\cdot 1\Big)dxdy$$

simmetrico rispetto a $x=0$

$$=\iint_A\frac{y^2(2-\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy+|A|\overset{CP}{=}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{2}\frac{\rho^2\sin^2\theta\cdot(2-\rho)}{\cancel{\rho}}\cancel{\rho}\,d\rho\, d\theta+4\pi$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta\cdot\left[2\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2+4\pi=\frac{4\pi}{3}+4\pi=\frac{16\pi}{3}.$$

2) Parametrizzazione di S_2:

$$\vec{\sigma}(x,y)=(x,y,0) \text{ con } A=\{(x,y):x^2+y^2\le 4\}.$$

Allora

$$\vec{\sigma_x}\times\vec{\sigma_y}=(0,0,1)=\vec{n}^+$$

normale esterna $(0,0,-1)$ è opposta

e quindi il flusso è

$$\iint_{S_2}\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=-\iint_A\langle(1,y\underbrace{z}_{z=0},1),(0,0,1)\rangle dxdy$$

$$=-\iint_A 1\,dxdy=-|A|=-4\pi.$$

Così il flusso uscente attraverso S è

$$\iint_S\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=\iint_{S_1}\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle+\iint_{S_2}\langle\vec{F},d\vec{S}\rangle=\frac{16\pi}{3}-4\pi=\frac{4\pi}{3}.$$