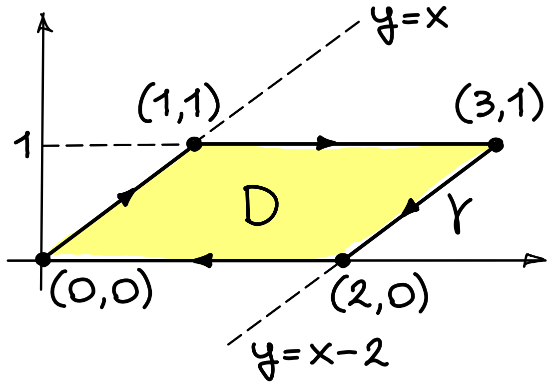
ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 32

ALCUNI ESERCIZI DEL FOGLIO 7

1.a Calcolare $\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove $\vec{F} = \left((x^2+y^2)e^x, ye^x\right)$

e γ è il quadrilatero di vertici $(0,0), (2,0), (3,1), (1,1)$ percorso in senso orario.



Il percorso γ è il bordo di

$$D = \{(x,y) : y \leq x \leq y+2, \, y \in [0,1]\}$$

e dunque per la formula di Gauss-Green

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \underset{\text{orario}}{=} -\int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \overset{GG}{=} -\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$= -\iint_D (ye^x - 2ye^x)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1} y \left(\int_{x=y}^{y+2} e^x \, dx \right) dy$$

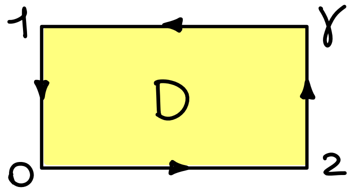
$$= \int_0^1 y(e^{y+2} - e^y)\,dy = (e^2-1)\int_0^1 ye^y\,dy$$

$$= (e^2-1)\Big[e^y(y-1)\Big]_0^1 = e^2 - 1.$$

1.b Calcolare $\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove

$$\vec{F} = \left(\frac{x+3y}{(1+x)^2}, 3y^2 \log(\overbrace{1+x+y+xy}^{(1+x)(1+y)}) \right)$$

e γ è il bordo di $D=[0,2]\times[0,1]$ percorso in senso antiorario.



Notiamo che il dominio di $\vec{F}$ contiene D e possiamo applicare la formula di Gauss-Green

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \overset{GG}{=} \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{1} \left(\frac{3y^2}{1+x} - \frac{3}{(1+x)^2} \right) dx\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{2} \left(\frac{\cancel{3}}{1+x} \left[\frac{y^3}{\cancel{3}} \right]_0^1 - \frac{3}{(1+x)^2} [y]_0^1 \right) dx$$

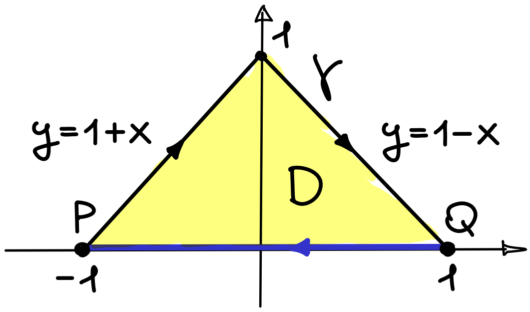
$$= \left[\log(1+x) + \frac{3}{1+x} \right]_0^2 = \log 3 + 1 - 3 = \log 3 - 2.$$

1.f Calcolare $\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove

$$\vec{F} = \left(\frac{x+y^2}{1+x^2}, y^2 + y \,\text{arctg}(x) \right)$$

e γ è l'unione dei segmenti da $(-1,0)$ a $(0,1)$ e da $(0,1)$ a $(1,0)$.

In alternativa al calcolo diretto possiamo usare la formula di GG chiudendo γ con il segmento da Q a P.



$$\int_\gamma \langle \vec F, d\vec s\rangle \overset{GG}{=} \underset{\text{orario}}{-}\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy - \int_{[Q,P]} \langle \vec F, d\vec s\rangle$$

$$= -\iint_D \left(\frac{y}{1+x^2} - \frac{2y}{1+x^2}\right) dx\,dy + \int_{-1}^{1} F_1(t,0)\,dt$$

simmetrico per $x=0$

$$= \iint_D \overset{x\text{-pari}}{\frac{y}{1+x^2}}\, dx\,dy + \int_{-1}^{1} \overset{\text{dispari}}{\frac{t}{1+t^2}}\, dt$$

$$= 2\int_{x=0}^{1} \frac{1}{1+x^2}\left(\int_{y=0}^{1-x} y\,dy\right)dx + 0 = \cancel{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\left[\frac{y^2}{\cancel{2}}\right]_0^{1-x} dx$$

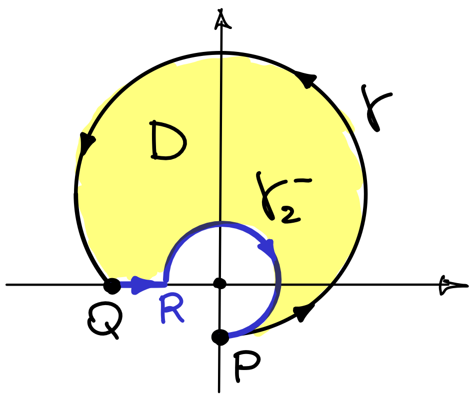
$$= \int_0^1 \overset{1-\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1+x^2-2x}{1+x^2}}\, dx = 1 - \left[\log(1+x^2)\right]_0^1 = 1 - \log 2.$$

$\boxed{1.g}$ Calcolare $\int_\gamma \langle \vec F, d\vec s\rangle$ dove $\vec F = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2}\right)$
e $\vec\gamma(t) = (\sqrt2 \cos t, 1+\sqrt2 \operatorname{sen} t)$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

γ è l'arco di una circonferenza centrata in $(0,1)$ e raggio $\sqrt2$.

$$P = \vec\gamma\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = (0, 1-\sqrt2)$$

$$Q = \vec\gamma\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) = (-1, 0)$$



Consideriamo $\vec F = \vec F_1 + \vec F_2$ con

$\vec F_1 = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
con potenziale $U_1(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2})$
e
$\vec F_2 = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Allora

$$\int_\gamma \langle \vec{F}_1, d\vec{s}\rangle = U_1(Q) - U_1(P) = \overset{0}{\overset{\|}{\log(1)}} - \log(\sqrt{2}-1).$$

Per $\vec{F}_2$ chiudiamo γ in modo che il percorso non si avvolga intorno a $(0,0)$ e che sia composto da segmenti radiali e archi di circonferenze centrate in $(0,0)$ (così il calcolo è più agevole).

Ad esempio consideriamo D tale che

$$\partial^+ D = \gamma \cup [Q,R] \cup \gamma_2^-$$

con $R = (1-\sqrt{2}, 0)$ e

$$\gamma_2(t) = (\sqrt{2}-1)\cdot(\cos t, \sin t) \quad \text{per } t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Così dato che $\vec{F}_2$ è irrotazionale in D per GG,

$$\int_\gamma \langle \vec{F}_2, d\vec{s}\rangle \overset{GG}{=} \iint_D 0\, dx\,dy - \int_{[Q,R]\cup\gamma_2^-} \langle \vec{F}_2, d\vec{s}\rangle$$

$$= \underbrace{-\int_{[Q,R]} \langle \vec{F}_2, d\vec{s}\rangle}_{\overset{\|}{0}} + \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}_2, d\vec{s}\rangle$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cancel{(\sqrt{2}-1)^2}}{\cancel{(\sqrt{2}-1)^2}}\, dt = \pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

Si conclude che

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \int_\gamma \langle \vec{F}_2, d\vec{s}\rangle + \int_\gamma \langle \vec{F}_1, d\vec{s}\rangle$$

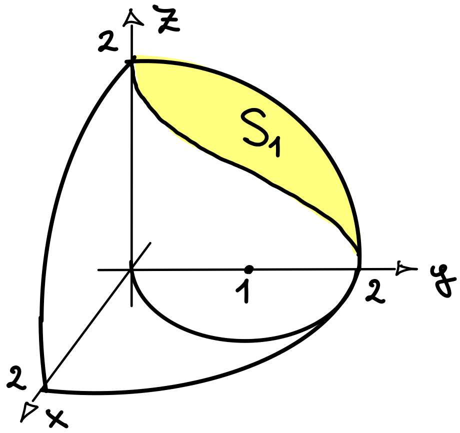
$$= -\log(\sqrt{2}-1) + \frac{3\pi}{2}.$$

2.d Calcolare l'area di

$$S=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2\leq 2y\}.$$ $\rightarrow x^2+(y-1)^2\leq 1$

S è la parte della sfera $x^2+y^2+z^2=4$ contenuta nel cilindro $x^2+(y-1)^2\leq 1$.

Dato che S è simmetrica rispetto ai piani $x=0$ e $z=0$ basta calcolare 4 volte l'area di S_1 ossia la parte di S contenuta nel primo ottante.



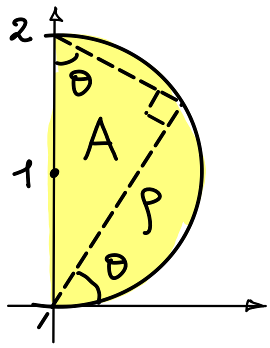
Svolgiamo il calcolo in due modi.

1) Parametrizzazione cartesiana di S_1:

$$\vec{\sigma}(x,y)=(x,y,\sqrt{4-x^2-y^2})\ \text{con}\ A=\{x^2+(y-1)^2\leq 1,\ x\geq 0\}.$$

Allora
$$\vec{\sigma}_x\times\vec{\sigma}_y=\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},1\right)$$

da cui $\|\vec{\sigma}_x\times\vec{\sigma}_y\|=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$. Così



$$|S|=4\iint_A\|\vec{\sigma}_x\times\vec{\sigma}_y\|\,dx\,dy$$

$$\overset{CP}{=}8\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho=0}^{2\sin\theta}\frac{1}{\sqrt{4-\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\theta$$

$t=4-\rho^2$
$dt=-2\rho\,d\rho$
$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{4\cos^2\theta}^{4}\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{dt}{2}\right)d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[\sqrt{t}\Big]_{4\cos^2\theta}^{4}d\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-2\cos\theta)\,d\theta=8\Big[2\theta-2\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=8(\pi-2).$$

2) Parametrizzazione in coordinate sferiche di S_1:

$$\vec{\sigma}(\theta,\varphi)=(2\cos\theta \,\mathrm{sen}\varphi,\, 2\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi,\, 2\cos\varphi)$$

con $A=\left\{(\theta,\varphi) : \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ 0\leq\varphi\leq\theta\right\}$ perché la condizione $x^2+y^2\leq 2y$ è equivalente a

$$(2\cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi)^2+(2\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi)^2\leq 2\cdot 2\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi$$

e, visto che nel primo ottante $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, si ha

$$\cancel{4}\,\mathrm{sen}^{\cancel{2}}\varphi\leq\cancel{4}\,\mathrm{sen}\theta\,\cancel{\mathrm{sen}}\varphi \quad \text{ossia} \quad 0\leq\varphi\leq\theta.$$

Ricordando che $\|\vec{\sigma}_\theta\times\vec{\sigma}_\varphi\|=R^2\mathrm{sen}\varphi=4\,\mathrm{sen}\varphi$ si ha

$$|S|=4\iint_A\|\vec{\sigma}_\theta\times\vec{\sigma}_\varphi\|\,d\theta\, d\varphi=4\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\varphi=0}^{\theta}4\,\mathrm{sen}\varphi\, d\varphi\right)d\theta$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\theta}d\theta=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\theta)\,d\theta$$

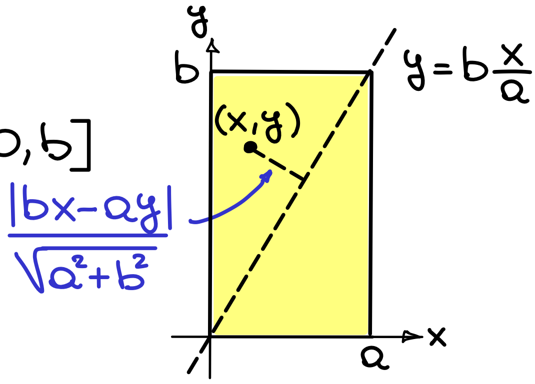
$$=16\Big[\theta-\mathrm{sen}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=8(\pi-2).$$

2.9 Calcolare I/M del rettangolo
$$S=\{(x,y,0): x\in[0,a],\, y\in[0,b]\} \text{ con } a,b>0$$
rispetto all'asse z e ad una sua diagonale.

Parametrizzazione di S:

$\vec{\sigma}(x,y)=(x,y,0)$ con $A=[0,a]\times[0,b]$

Quindi $\vec{\sigma}_x\times\vec{\sigma}_y=(0,0,1)$.



1) Asse z.

$$\frac{I}{M}=\frac{1}{|S|}\iint_S (x^2+y^2)\,dS=\frac{1}{ab}\iint_{[0,a]\times[0,b]}(x^2+y^2)\cdot 1\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{ab}\int_0^a\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^b dx=\frac{1}{ab}\int_0^a\left(bx^2+\frac{b^3}{3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{ab}\left[b\frac{x^3}{3}+\frac{b^3x}{3}\right]_0^a=\frac{1}{ab}\cdot\frac{ba^3+b^3a}{3}=\frac{a^2+b^2}{3}.$$

2) Diagonale di S.

$$\frac{I}{M}=\frac{1}{|S|}\iint_S\frac{(bx-ay)^2}{a^2+b^2}\,dS=\frac{1}{ab(a^2+b^2)}\int_0^a\int_0^b(bx-ay)^2\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{ab(a^2+b^2)}\int_0^a\left[b^2x^2y-\cancel{2}abx\frac{y^2}{\cancel{2}}+a^2\frac{y^3}{3}\right]_0^b dx$$

$$=\frac{b^3}{ab(a^2+b^2)}\int_0^a\left(x^2-ax+\frac{a^2}{3}\right)dx$$

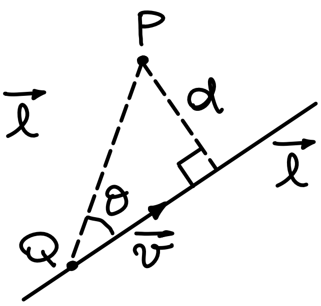
$$=\frac{b^3}{ab(a^2+b^2)}\left[\frac{x^3}{3}-a\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{3}x\right]_0^a=\frac{a^3b^3}{ab(a^2+b^2)}\cdot\frac{1}{6}=\frac{a^2b^2}{6(a^2+b^2)}.$$

OSSERVAZIONE

d = distanza di P da $\vec{\ell}$

$= \|P-Q\| \, |\operatorname{sen}\theta|$

$= \|(P-Q) \times \vec{v}\|$



retta $\vec{\ell}$ passante per Q e direzione e versore $\vec{v}$

Nel caso di $Q=(0,0,0)$, $\vec{v}=\dfrac{(a,b,0)}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $P=(x,y,0)$.

$$d=\left|\det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \end{bmatrix}\right| = \frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$\boxed{3.a}$ Verificare che se g è C^2 allora $\operatorname{rot}(\nabla g)=\vec{0}$.

$$\operatorname{rot}(\nabla g)=\det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_x & g_y & g_z \end{bmatrix}$$

Teorema di Schwarz

$$= (g_{zy}-g_{yz},\, g_{xz}-g_{zx},\, g_{yx}-g_{xy}) = (0,0,0).$$

Si noti che $\operatorname{rot}(\nabla g)=\vec{0}$ è come dire che ogni campo conservativo ∇g è irrotazionale.