ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 31

In modo simile al caso visto dei solidi "pieni", il rapporto tra il momento d'inerzia I di una superficie S (considerata come solido "vuoto" omogeneo) rispetto ad un asse $\vec{\ell}$ e la sua massa M è

$$\frac{I}{M} = \frac{1}{|S|} \iint_S d^2_{\vec{\ell}}(x,y,z)\,dS.$$

ESEMPI

- Determinare il rapporto I/M per una sfera omogenea rispetto ad un suo asse.

  Sia $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=R^2\}$ e sia $\vec{\ell}$ l'asse z.

  Usiamo la parametrizzazione

$$\vec{\sigma}(\theta,\varphi) = (R\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, R\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, R\cos\varphi)$$

con $(\theta,\varphi) \in A = [0,2\pi] \times [0,\pi]$. Allora

$$\frac{I}{M} = \frac{1}{|S|} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} (x^2+y^2) \underbrace{\|\vec{\sigma}_\theta \times \vec{\sigma}_\varphi\|}_{= R^2 \operatorname{sen}\varphi} d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi \cancel{R^2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\cancel{R^2} \operatorname{sen}^2\varphi) R^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{\cancel{2\pi}}{\underset{2}{\cancel{4\pi}}} R^2 \int_0^{\pi} \underbrace{\operatorname{sen}^3\varphi\, d\varphi}_{= -(1-\cos^2\varphi)\,d(\cos\varphi)}$$

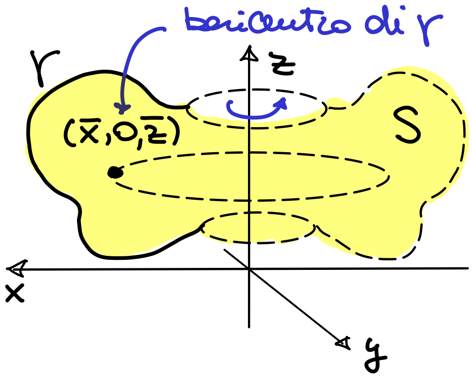
$$= \frac{R^2}{2} \left[-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{R^2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} R^2.$$

OSSERVAZIONE

Consideriamo la superficie S generata dalla rotazione di una curva γ tale che $\gamma \subseteq \{(x,0,z) : x \geq 0\}$

$$S = \left\{(x,y,z) : \left(\sqrt{x^2+y^2}, 0, z\right) \in \gamma\right\}$$

Quanto vale l'area di S?



Una parametrizzazione di S è

$$\vec{\sigma}(t,\theta) = (x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, z(t)) \text{ con } A = [a,b]\times[0,2\pi]$$

dove $\overline{\gamma}(t) = (x(t), 0, z(t))$ per $t \in [a,b]$.

Allora

$$\vec{\sigma}_t(t,\theta) = (x'(t)\cos\theta, x'(t)\sin\theta, z'(t))$$
$$\vec{\sigma}_\theta(t,\theta) = (-x(t)\sin\theta, x(t)\cos\theta, 0)$$

e

$$\|\vec{\sigma}_t \times \vec{\sigma}_\theta\|^2 = (-z'(t)x(t)\cos\theta)^2 + (-z'(t)x(t)\sin\theta)^2 + (x'(t)x(t))^2$$
$$= (x(t))^2\left((z'(t))^2 + (x'(t))^2\right).$$

Infine

$$|S| = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_a^b \overset{\geq 0}{x(t)} \cdot \overbrace{\sqrt{(z'(t))^2 + (x'(t))^2}}^{\|\overline{\gamma}'(t)\|}\, dt = 2\pi \cdot \int_\gamma x\, ds$$

$$= 2\pi\bar{x}\cdot|\gamma|$$ FORMULA DI PAPPO-GULDINO PER SUPERFICI DI ROTAZIONE

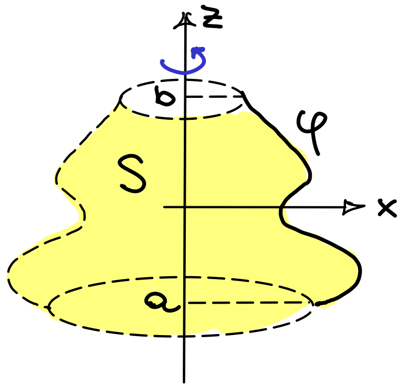
ossia l'area di S è data dal prodotto della lunghezza della circonferenza descritta dalla rotazione del baricentro di γ e della lunghezza di γ.

Nel caso particolare in cui

$$[a,b] \longrightarrow \vec{\gamma}(z) = (\varphi(z), 0, z)$$

con $\varphi \in C([a,b])$, si ha che

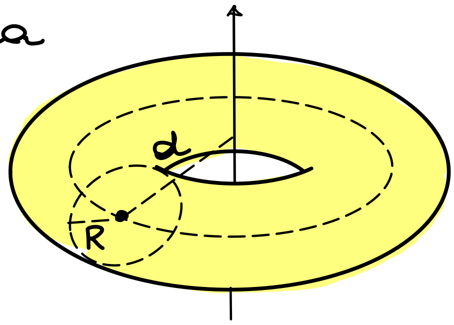
$$|S| = 2\pi \int_\gamma x \, ds = 2\pi \int_a^b \varphi(z)\sqrt{1+(\varphi'(z))^2}\, dz$$



$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- Se γ è la circonferenza $(x-d)^2+z^2=R^2$ con $d>R$ allora la superficie generata dalla sua rotazione attorno all'asse z è quella del toro

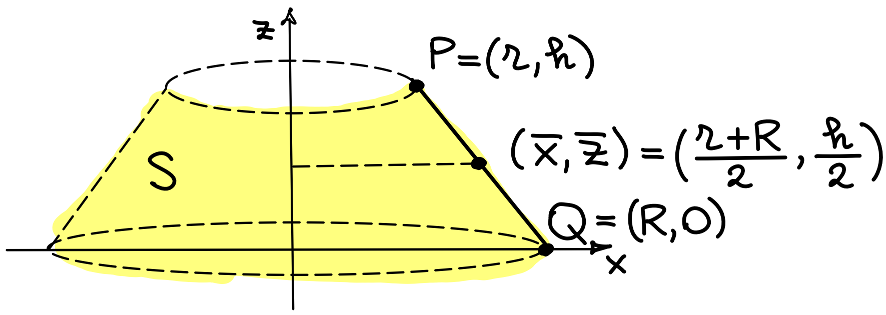
$$S = \{(x,y,z) : (\sqrt{x^2+y^2}-d)^2+z^2=R^2\}$$



Per la formula di Pappo-Guldino l'area è

$$|S| = 2\pi d \cdot 2\pi R.$$

- Per ottenere l'area della superficie laterale di un tronco di cono consideriamo la rotazione di un segmento PQ attorno all'asse z.



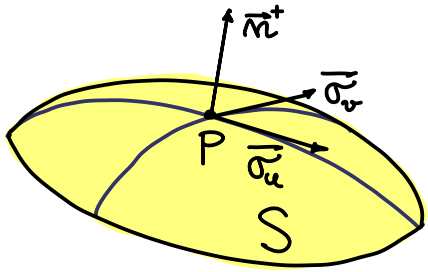
Il baricentro di PQ è il suo punto medio

$$(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}((r,h)+(R,0)) = \left(\frac{r+R}{2}, \frac{h}{2}\right).$$

Così $|S| = 2\pi \cdot \frac{r+R}{2} \cdot |PQ| = \pi(r+R)\cdot\sqrt{(R-r)^2+h^2}.$

SUPERFICI - 2ª PARTE

Sia $\vec{\sigma}$ una superficie regolare con sostegno S e sia



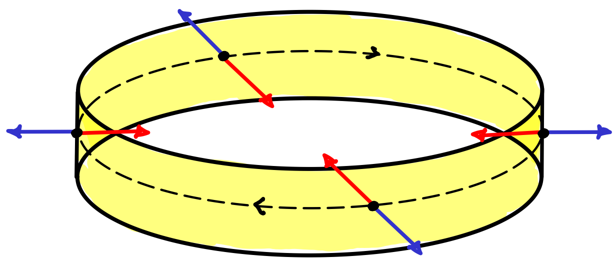
$$\vec{n}^+ = \frac{\vec{\sigma_u} \times \vec{\sigma_v}}{\|\vec{\sigma_u} \times \vec{\sigma_v}\|}$$

il versore normale in un punto generico P di S.

Se lungo ogni curva chiusa contenuta in S, $\vec{n}^+$ mantiene il verso dopo un giro completo, allora S si dice ORIENTABILE.

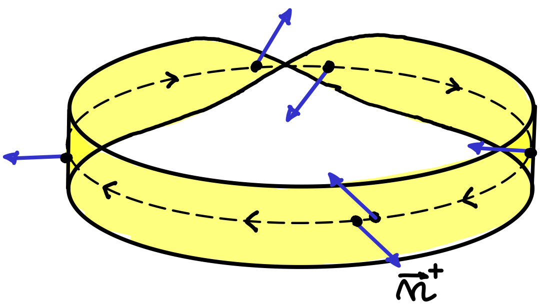
Se S è orientabile allora ogni parametrizzazione di S determina, con la definizione di $\vec{n}^+$, una delle due possibili orientazioni di S.

Cilindro con le due possibili orientazioni



Le superfici cartesiane, il cilindro, la sfera e il toro sono orientabili. Però non tutte le superfici regolari sono orientabili.

Un esempio è il NASTRO DI MÖBIUS:



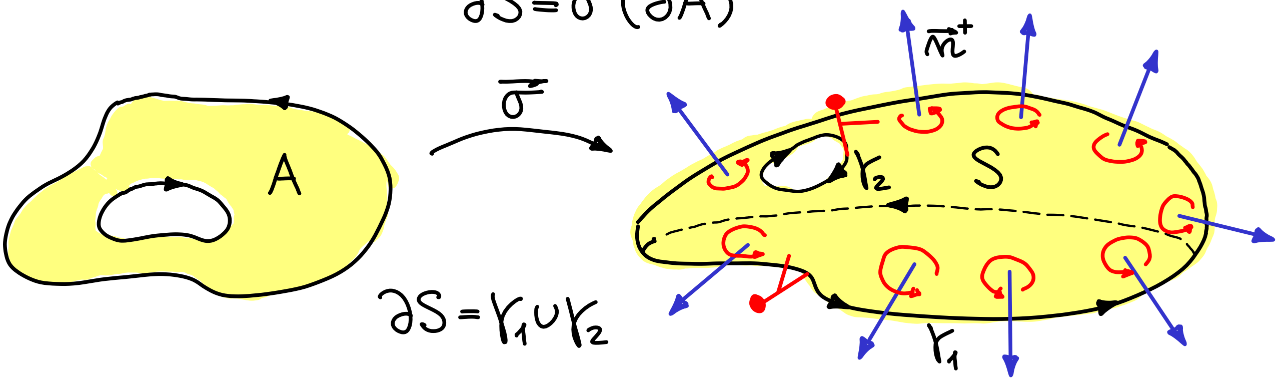
Dopo un giro completo lungo la curva chiusa mediana, $\vec{n}^+$ cambia verso.

Un'altra nozione importante è quella di bordo di una superficie (che qui non tratteremo nella sua completa generalità).

Sia $\vec{\sigma}: A \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e consideriamo due casi.

1) Se $\vec{\sigma}$ è iniettiva in tutto A (e non solo nella parte interna) allora il BORDO di S è

$$\partial S = \vec{\sigma}(\partial A)$$



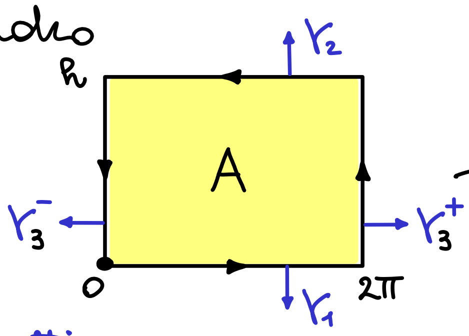
L'orientazione di S induce un'orientazione del bordo ∂S detta ORIENTAZIONE POSITIVA: il verso di ogni curva chiusa che compone ∂S è tale che percorrendola "in piedi" lungo il verso indicato da $\vec{n}^+$, i punti di S stanno sempre a sinistra.

Indichiamo con $\overset{+}{\partial} S$ l'orientazione positiva del bordo di S.

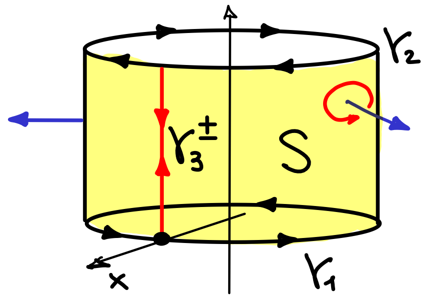
2) Se $\vec{\sigma}$ non è iniettiva in tutto A allora il bordo di S è un sottoinsieme di $\vec{\sigma}(\partial A)$.

Vediamo la definizione di ∂S in due esempi significativi: il cilindro e il segmento sferico.

• Cilindro



$\xrightarrow{\vec{\sigma}}$



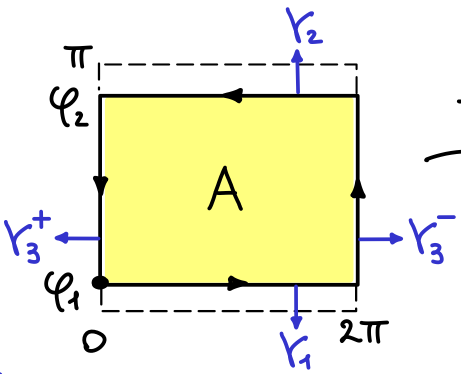
non iniettiva in ∂A $\longrightarrow$ $\vec{\sigma}(\theta, z) = (R\cos\theta, R\sin\theta, z)$

Allora $\vec{\sigma}(\partial A) = \gamma_1 \cup \gamma_3^+ \cup \gamma_2 \cup \gamma_3^-$ e

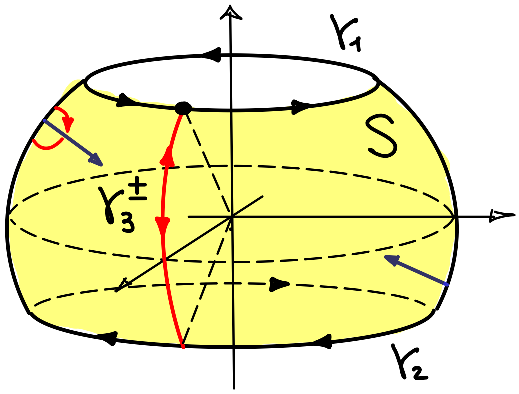
$$\partial S = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

ossia il bordo di S è "solo" l'unione delle due circonferenze γ_1 e γ_2. Il segmento verticale percorso in entrambi i versi non fa parte di ∂S.

• Segmento sferico



$\xrightarrow{\vec{\sigma}}$



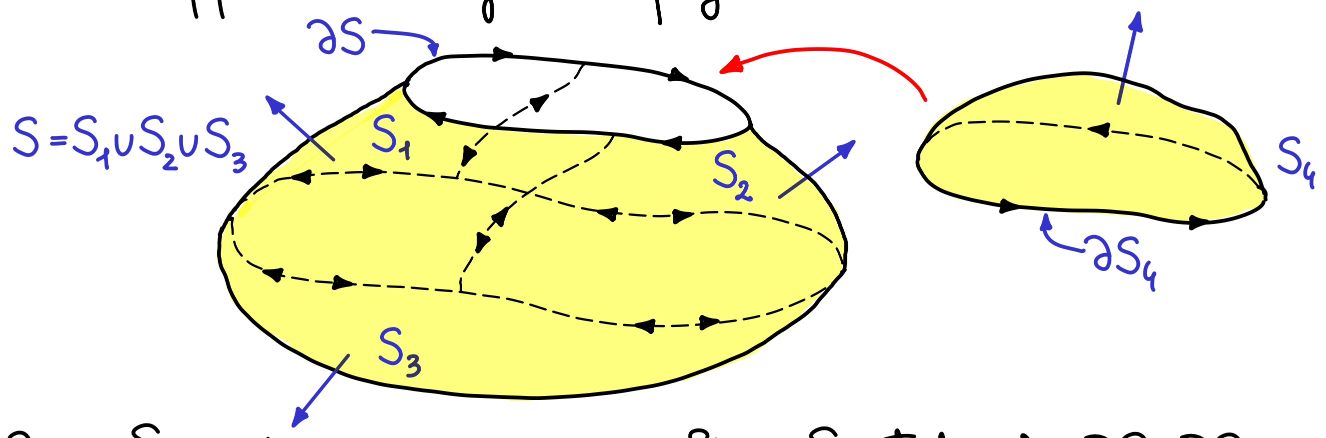
non iniettiva in ∂A $\longrightarrow$ $\vec{\sigma}(\theta, \varphi) = (R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi)$

Allora $\vec{\sigma}(\partial A) = \gamma_1 \cup \gamma_3^- \cup \gamma_2 \cup \gamma_3^+$ e

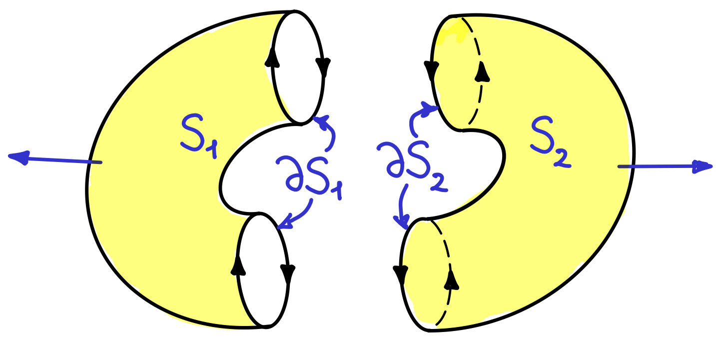
$$\partial S = \begin{cases} \gamma_1 \cup \gamma_2 & \text{se } 0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi \\ \gamma_2 & \text{se } \varphi_1 = 0,\ 0 < \varphi_2 < \pi \\ \gamma_1 & \text{se } 0 < \varphi_1 < \pi \text{ e } \varphi_2 = \pi \\ \emptyset & \text{se } \varphi_1 = 0 \text{ e } \varphi_2 = \pi \quad \text{SFERA} \end{cases}$$

Se $\partial S = \emptyset$ allora la superficie S si dice CHIUSA e separa $\mathbb{R}^3$ in due parti: quella interna e quella esterna a S. La sfera è una superficie chiusa.

Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice SUPERFICIE REGOLARE A PEZZI se esistono un numero finito di curve regolari a tratti detti SPIGOLI che suddividono S in N superfici regolari $S_1, S_2, \ldots, S_N$ dette FACCE. Ogni spigolo confina con al più due facce.
In tal caso il bordo ∂S è l'unione $\bigcup_{i=1}^{N} \partial S_i$ meno gli spigoli che appartengono ai bordi di due facce adiacenti.
S è orientabile se ogni faccia S_i è orientabile e se ogni coppia di facce S_i e S_j con uno spigolo in comune le orientazioni positive di ∂S_i e ∂S_j sono opposte lungo lo spigolo.



Se a S uniamo una superficie S_4 tale che $\partial S = \partial S_4$ in modo che l'orientazione di ∂S_4 sia opposta a quella indicata per ∂S si ottiene una superficie chiusa orientata verso l'esterno.



Unendo S_1 e S_2 lungo i loro bordi ∂S_1 e ∂S_2 si ottiene un toro che non ha bordo. Il toro è una superficie chiusa.