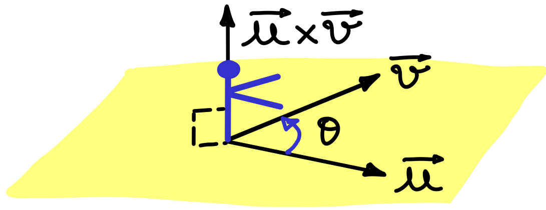
ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 30

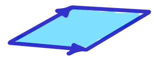
Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\vec{e}_1=\vec{\imath}$, $\vec{e}_2=\vec{\jmath}$, $\vec{e}_3=\vec{k}$ è definita la seguente operazione tra vettori $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ detta PRODOTTO VETTORIALE:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\det\begin{bmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}$$



$$=(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1)\in\mathbb{R}^3$$

Proprietà principali:

1) $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot|\sin(\theta)|$ = area del parallelogramma generato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$ 

2) $\vec{u}\times\vec{v}$ è ortogonale al piano che contiene $\vec{u}$ e $\vec{v}$, orientato secondo il verso destrorso

3) $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$ (anticommutativo)

4) $(\alpha\vec{u}_1+\beta\vec{u}_2)\times\vec{v}=\alpha\vec{u}_1\times\vec{v}+\beta\vec{u}_2\times\vec{v}$
$\vec{u}\times(\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2)=\alpha\vec{u}\times\vec{v}_1+\beta\vec{u}\times\vec{v}_2$ (bilineare)

Se $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$ è un campo vettoriale C^1 in $D\subseteq\mathbb{R}^3$ si definiscono i seguenti OPERATORI DIFFERENZIALI

1) DIVERGENZA di $\vec{F}$:

$$\operatorname{div}(\vec{F})=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$$ scalare

2) ROTORE di $\vec{F}$:

vettore

$$\operatorname{rot}(\vec{F})=\det\begin{bmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{bmatrix}=\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x},\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

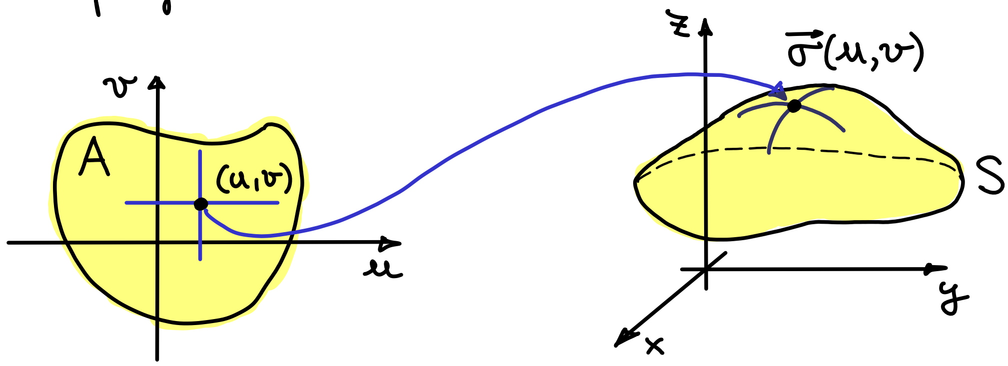
In $\mathbb{R}^3$, $\vec{F}$ è irrotazionale $\iff\operatorname{rot}(\vec{F})=\vec{0}$.

SUPERFICI - 1ª PARTE

Una SUPERFICIE (PARAMETRICA) è una funzione continua in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ chiusura di un aperto limitato e connesso a valori in $\mathbb{R}^3$

$$A \ni (u,v) \longrightarrow \vec{\sigma}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3$$

tale che $\vec{\sigma}$ è iniettiva nella parte interna di A.
L'insieme immagine $S = \vec{\sigma}(A) \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice SOSTEGNO della superficie.



Una superficie $\vec{\sigma}$ si dice REGOLARE se $\vec{\sigma} \in C^1(A)$ e per ogni (u,v) interno ad A i vettori

$$\vec{\sigma}_u(u,v) = (x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v))$$

e

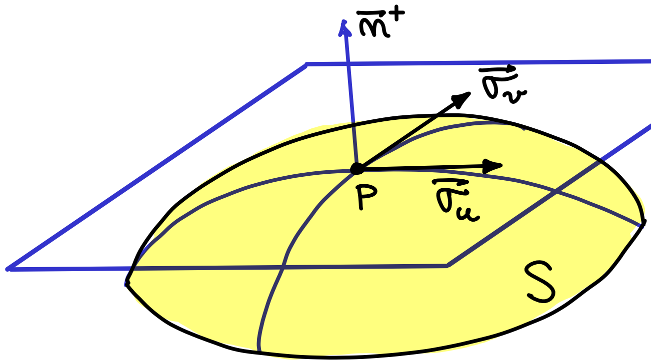
$$\vec{\sigma}_v(u,v) = (x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v))$$

sono linearmente indipendenti.
In tal caso, i vettori $\vec{\sigma}_u(u,v)$ e $\vec{\sigma}_v(u,v)$ sono tangenti al sostegno S nel punto $\vec{\sigma}(u,v)$ e

$$\vec{n}^{\pm}(u,v) = \pm \frac{\vec{\sigma}_u(u,v) \times \vec{\sigma}_v(u,v)}{\|\vec{\sigma}_u(u,v) \times \vec{\sigma}_v(u,v)\| \neq 0}$$

indipendenza lineare

sono i VERSORI NORMALI a S in tale punto.



$P=\vec{\sigma}(u,v)$

L'equazione del PIANO TANGENTE a S in $P=(x_0,y_0,z_0)$ è

$$\langle \vec{n}^+,(x-x_0,\, y-y_0,\, z-z_0)\rangle = 0.$$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- Se $f\in C^1(A)$ allora

anche le permutazioni (x,f,z) e (f,y,z)

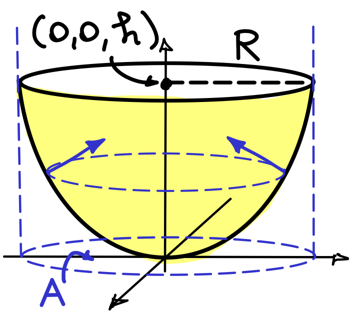
$$\vec{\sigma}(x,y)=(x,y,f(x,y)) \quad \text{per } (x,y)\in A \qquad u=x,\ v=y$$

è una SUPERFICIE CARTESIANA che ha come sostegno il grafico di f su A con

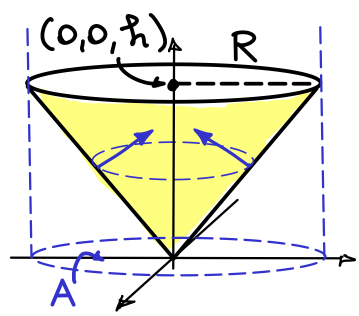
$$\vec{\sigma_x}\times\vec{\sigma_y}=\det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & f_x\\ 0 & 1 & f_y\end{bmatrix}=(-f_x,-f_y,1)$$

e $\|\vec{\sigma_x}\times\vec{\sigma_y}\|=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}.$

Ad esempio se $A=\{(x,y): x^2+y^2\leq R^2\}$ allora



paraboloide



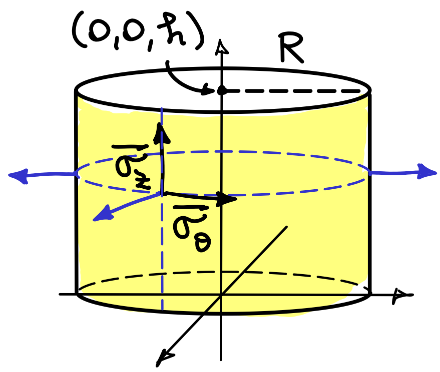
cono

$$f(x,y)=\frac{h}{R^2}(x^2+y^2) \qquad\qquad f(x,y)=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\vec{\sigma_x}\times\vec{\sigma_y}=\left(-\frac{2h}{R^2}x,-\frac{2h}{R^2}y,1\right) \qquad \vec{\sigma_x}\times\vec{\sigma_y}=\left(\frac{-hx}{R\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-hy}{R\sqrt{x^2+y^2}},1\right)$$

$$(x,y)\neq(0,0)$$

- Cilindro lungo l'asse z.



$$\vec{\sigma}(\theta,z)=(R\cos\theta, R\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$$

per $(\theta,z)\in A=[0,2\pi]\times[0,h]$

$u=\theta,\ v=z$

$$\vec{\sigma_\theta}\times\vec{\sigma_z}=\det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -R\,\mathrm{sen}\,\theta & R\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=(R\cos\theta, R\,\mathrm{sen}\,\theta, 0).$$

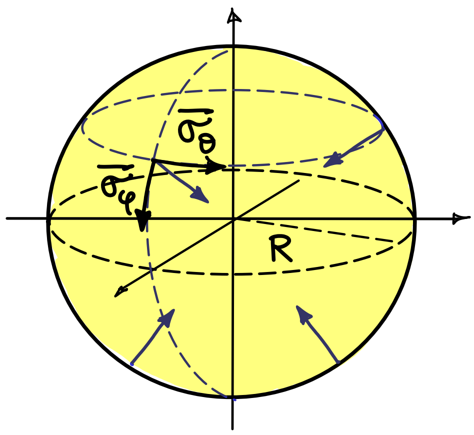
Si noti che $\|\vec{\sigma_\theta}\times\vec{\sigma_z}\|=R$.

- Sfera centrata in $\vec{O}$ di raggio $R>0$.

$$\vec{\sigma}(\theta,\varphi)=(R\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, R\cos\varphi)$$

per $(\theta,\varphi)\in A=[0,2\pi]\times[0,\pi]$.

$u=\theta,\ v=\varphi$



Allora

$$\vec{\sigma_\theta}\times\vec{\sigma_\varphi}=\det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi & R\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi & 0\\ R\cos\theta\cos\varphi & R\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi & -R\,\mathrm{sen}\,\varphi\end{bmatrix}$$

$$=-\mathrm{sen}\,\varphi\, R^2(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \cos\varphi)$$

$$=-\mathrm{sen}\,\varphi\, R\cdot(x,y,z)$$

dove $\vec{\sigma}(\theta,\varphi)=(x,y,z)$. Inoltre

$$\|\vec{\sigma_\theta}\times\vec{\sigma_\varphi}\|=R\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\|(x,y,z)\|=R^2\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

INTEGRALI DI SUPERFICIE

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $D \subseteq \mathbb{R}^3$ e sia $\vec{\sigma}: A \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare tale che D contiene S il sostegno di $\vec{\sigma}$.
Allora l'INTEGRALE DI SUPERFICIE di f in S è definito come

$$\iint_S f \, dS = \iint_A f(\vec{\sigma}(u,v)) \cdot \|\vec{\sigma_u}(u,v) \times \vec{\sigma_v}(u,v)\| \, du\, dv$$

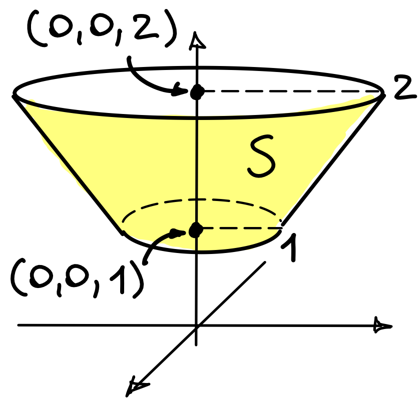
dove $dS = \|\vec{\sigma_u} \times \vec{\sigma_v}\| du\, dv$ è l'elemento infinitesimo d'area. Inoltre

$$\iint_S 1 \, dS = \iint_A \|\vec{\sigma_u}(u,v) \times \vec{\sigma_v}(u,v)\| \, du\, dv = |S|$$

è l'AREA di S.

OSSERVAZIONE
L'integrale di superficie $\iint_S f\,dS$ non dipende dalla parametrizzazione $\vec{\sigma}$ di S.

ESEMPI



- Sia $f(x,y,z) = x^2 z^2$ e
  $S = \{(x,y,z) : z^2 = x^2 + y^2, \ z \in [1,2]\}$.

Calcolare $\iint_S f\,dS$.

Parametrizzazione di S:

$\vec{\sigma}(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$ con $(x,y) \in A = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$.

Così $\vec{\sigma_x} \times \vec{\sigma_y} = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$

e $\quad \|\vec{\sigma_x} \times \vec{\sigma_y}\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1} = \sqrt{2}.$

Quindi

$$\iint_S f\,dS = \iint_A f(\vec{\sigma}(x,y)) \cdot \|\vec{\sigma_x} \times \vec{\sigma_y}\|\,dx\,dy$$

$$= \iint_A x^2(x^2+y^2) \cdot \sqrt{2}\,dx\,dy$$

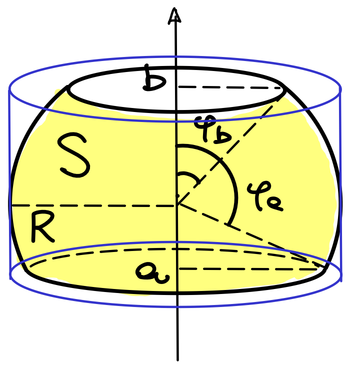
$$\overset{CP}{=} \sqrt{2} \int_{\rho=1}^{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho^2 \cos^2\theta \cdot \rho^2 \cdot \rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta \cdot \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_1^2 = \sqrt{2}\,\pi\,\frac{21}{2}.$$

- Calcolare l'area della parte di sfera

$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = R^2,\ a \le z \le b\}$$

con $-R \le a \le b \le R$.



Consideriamo la parametrizzazione

$$\vec{\sigma}(\theta,\varphi) = (R\cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi,\ R\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi,\ R\cos\varphi)$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [\varphi_a, \varphi_b]$ dove $a = R\cos\varphi_a$ e $b = R\cos\varphi_b$.
Allora

$$\vec{\sigma_\theta} \times \vec{\sigma_\varphi} = -\mathrm{sen}\varphi\, R \cdot (x,y,z)$$

con $(x,y,z) = \vec{\sigma}(\theta,\varphi)$ e

$$\|\vec{\sigma_\theta} \times \vec{\sigma_\varphi}\| = R^2 \mathrm{sen}\varphi.$$

Quindi

$$|S| = \iint_{[0,2\pi]\times[\varphi_a,\varphi_b]} \|\vec{\sigma_\theta} \times \vec{\sigma_\varphi}\|\,d\theta\,d\varphi = R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\varphi_b}^{\varphi_a} \mathrm{sen}\varphi\,d\varphi$$

$$= 2\pi R^2 \left[-\cos\varphi\right]_{\varphi_b}^{\varphi_a} = 2\pi R(b-a).$$

Si noti che $2\pi R(b-a)$ è anche l'area laterale del cilindro circoscritto.

Nel caso particolare in cui $b=R$ e $a=-R$ si trova l'area della sfera completa $2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$.

Se S è il sostegno di una superficie regolare allora il suo BARICENTRO è il punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con

$$\bar{x} = \frac{1}{|S|}\iint_S x \, dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{|S|}\iint_S y \, dS, \quad \bar{z} = \frac{1}{|S|}\iint_S z \, dS.$$

- Calcolare il baricentro di

$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = R^2, \, a \le z \le b\}$$

Vedi esempio precedente

con $-R \le a \le b \le R$.

Per simmetria $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Inoltre

$$\bar{z} = \frac{1}{|S|} \iint_{[0,2\pi]\times[\varphi_a,\varphi_b]} z \, \|\overline{\sigma_\theta} \times \overline{\sigma_\varphi}\| \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi R(b-a)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\varphi_b}^{\varphi_a} R\cos\varphi \cdot R^2 \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{\cancel{2\pi} R^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{2\pi R}(b-a)} \left[-\frac{\cos^2\varphi}{2}\right]_{\varphi_b}^{\varphi_a} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

In particolare se S è la semisfera superiore allora $b=R, a=0$ e $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{R}{2})$.