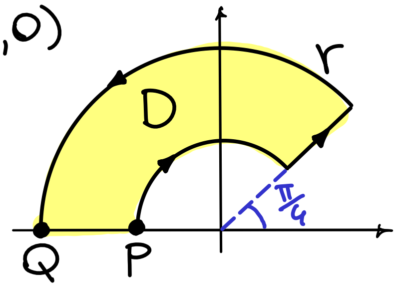
ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 29

ESEMPI

• Calcolare $\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove $\vec{F}(x,y) = (e^{-x} - 8y, \operatorname{sen}^2(y) - 3x^2)$ e γ è la curva da $P=(-1,0)$ a $Q=(-2,0)$ indicata in figura.



Per evitare il calcolo diretto applichiamo GG chiudendo il percorso con il segmento QP. Così $\partial^+ D = \gamma \cup [Q,P]$ e

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \overset{GG}{=} \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy - \int_{[Q,P]} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$
$$= (7\sqrt{2} + 9\pi) - (e^2 - e)$$

perché

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D (-6x + 8)\, dx\,dy$$
$$\overset{CP}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_1^2 (-6\rho\cos\theta + 8)\rho\, d\rho\, d\theta$$
$$= -\overset{2}{\cancel{6}} \left[\operatorname{sen}\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left[\frac{\rho^3}{\cancel{3}}\right]_1^2 + \cancel{8}\frac{3\pi}{\cancel{4}} \left[\frac{\rho^2}{\cancel{2}}\right]_1^2$$
$$= -2\left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(8-1) + 3\pi(4-1) = 7\sqrt{2} + 9\pi$$

e

$$\int_{[Q,P]} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{-2}^{-1} F_1(t,0)\,dt = \int_{-2}^{-1} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_{-2}^{-1} = e^2 - e.$$

$t \to (t,0) \quad t \in [-2,-1]$

- In un esempio precedente abbiamo considerato il campo (non conservativo)

$$\vec{F}(x,y)=(xy+x+y,y)$$

e dimostrato che

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = 0 \quad (*)$$

se γ è una circonferenza centrata in $(-1,y_0)$ con $y_0\in\mathbb{R}$ e raggio $r>0$.

Grazie alla formula GG possiamo dare una caratterizzazione delle curve chiuse semplici γ lungo le quali vale $(*)$: se D è l'insieme delimitato da γ allora

orientazione di γ

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \pm \int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \pm \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= \pm \iint_D (-x-1)\,dx\,dy = \mp |D| (\bar{x}+1)$$

dove $\bar{x}$ è la coordinata x del baricentro di D e $|D|$ l'area di D. Quindi $(*)$ vale se $\bar{x}=-1$.

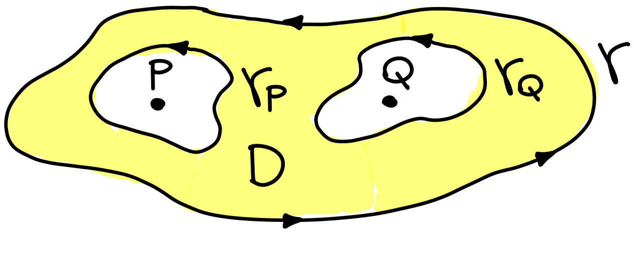
OSSERVAZIONE

Se $D\subseteq\mathbb{R}^2$ è s-decomponibile e $\vec{F}\in C^1(D)$ è un campo irrotazionale in D allora

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \overset{GG}{\Longrightarrow} \int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = 0.$$

Ad esempio se $\vec{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2\setminus\{P,Q\}$ e D è tale che

$$\partial^+ D = \gamma \cup \gamma_P^- \cup \gamma_Q^-$$



allora $\int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = 0$ implica che

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\gamma_P} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle + \int_{\gamma_Q} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

ossia l'integrale curvilineo di $\vec{F}$ lungo la curva che si "avvolge" intorno ai punti P e Q è uguale alla somma degli integrali curvilinei di $\vec{F}$ lungo le curve γ_P e γ_Q che si avvolgono separatamente intorno a P e Q.

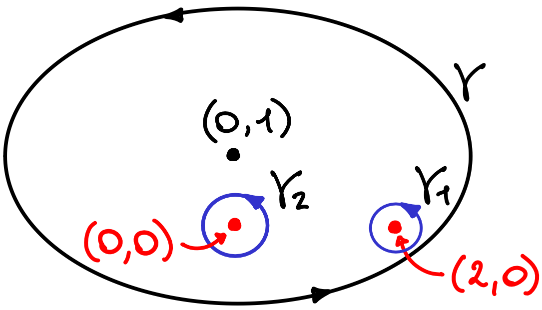
- Calcolare $\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove per $(x,y) \neq (0,0)$ e $(2,0)$

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{3y}{(x-2)^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}, \frac{-3(x-2)}{(x-2)^2+y^2} + \frac{2x}{x^2+y^2} \right)$$

e γ è l'ellisse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

percorsa in senso antiorario.



Osserviamo che $\vec{F} = -3\vec{F}_1 + 2\vec{F}_2$ con

$$\vec{F}_1(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-2)^2+y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2+y^2} \right), \quad \vec{F}_2(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

irrotazionali rispettivamente in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\}$ e $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Dato che

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(0)^2}{9} + \frac{(0-1)^2}{4} = 0 + \frac{1}{4} < 1 \\ &\frac{(2)^2}{9} + \frac{(0-1)^2}{4} = \frac{4}{9} + \frac{1}{4} < 1 \end{aligned}\right\}$$

(0,0) e (2,0) sono interni alla regione delimitata da γ

Quindi per l'osservazione precedente

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle + \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle$$

$2\pi \leftarrow$ calcolo diretto $\qquad$ $0 \leftarrow$ perché γ_1 non si avvolge intorno a $(0,0)$

$$= -3\overbrace{\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}_1, d\vec{s}\rangle}^{2\pi} + 2\overbrace{\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}_2, d\vec{s}\rangle}^{0}$$

$$-3\underbrace{\int_{\gamma_2} \langle \vec{F}_1, d\vec{s}\rangle}_{0} + 2\underbrace{\int_{\gamma_2} \langle \vec{F}_2, d\vec{s}\rangle}_{2\pi} = -3\cdot(2\pi) + 2\cdot(2\pi) = -2\pi$$

perché γ_2 non si avvolge intorno a $(2,0)$ $\qquad$ $2\pi \leftarrow$ calcolo diretto

dove $\quad \vec{\gamma}_1(t) = (2 + r_1\cos t, r_1 \operatorname{sen} t)$ per $t \in [0, 2\pi]$

$\qquad\quad \vec{\gamma}_2(t) = (r_2\cos t, r_2 \operatorname{sen} t)$ per $t \in [0, 2\pi]$

e i raggi $r_1, r_2 > 0$ sono sufficientemente piccoli tali che γ_1 e γ_2 sono interne all'ellisse γ e non passano per $(0,0)$ e $(2,0)$.

OSSERVAZIONE

La formula di Gauss-Green permette di calcolare l'area di una regione piana D attraverso un integrale curvilineo lungo la curva chiusa data dal bordo $\partial^+ D$.

Infatti se si considera il campo

$$\vec{F}(x,y) = (-\alpha y, \beta x) \quad \text{con } \alpha + \beta = 1$$

allora per GG

$$\int_{\partial^+ D} \langle (-\alpha y, \beta x), d\vec{s}\rangle = \iint_D \left(\frac{\partial(\beta x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\alpha y)}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$= \underbrace{(\beta + \alpha)}_{=1} \iint_D 1 \, dx\,dy = |D|.$$

$$\boxed{\text{ESEMPIO}}$$

• Calcolare l'area di $D=\left\{(x,y): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$

Il bordo di D è il sostegno della curva

$$\vec{\gamma}(t)=(a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t) \quad \text{per } t\in[0,2\pi]$$

un'ellisse di semiassi a, b centrata in (0,0).

$$|D|=\frac{1}{2}\int_{\partial^+ D}\langle(-y,x),d\vec{r}\rangle$$

$\alpha=\beta=\frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-b\,\mathrm{sen}\,t\cdot(a\cos t)' + a\cos t\cdot(b\,\mathrm{sen}\,t)'\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(\underbrace{\mathrm{sen}^2 t+\cos^2 t}_{=1})\,dt=\frac{\cancel{2}\pi ab}{\cancel{2}}=\pi ab.$$

OSSERVAZIONE

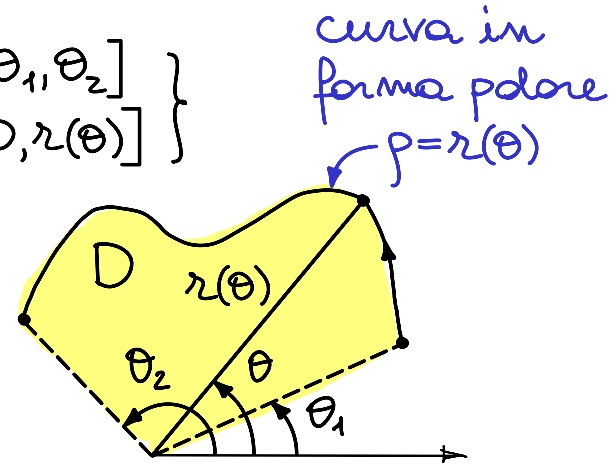
Un'altra formula per il calcolo dell'area di una regione piana D delimitata da una curva è la seguente. Sia

$$D=\left\{(x,y): \begin{matrix} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{matrix},\ \begin{matrix}\theta\in[\theta_1,\theta_2] \\ \rho\in[0,r(\theta)]\end{matrix}\right\}$$

dove $0\leq r(\theta)\in C([\theta_1,\theta_2])$

allora

$$|D|=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)\,d\theta.$$



La formula deriva direttamente dal cambio di variabili in coordinate polari

$$|D|=\iint_D 1\,dxdy\overset{CP}{=}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\int_0^{r(\theta)}\rho\,d\rho\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\rho^2\right]_0^{r(\theta)}d\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}r^2(\theta)\,d\theta.$$

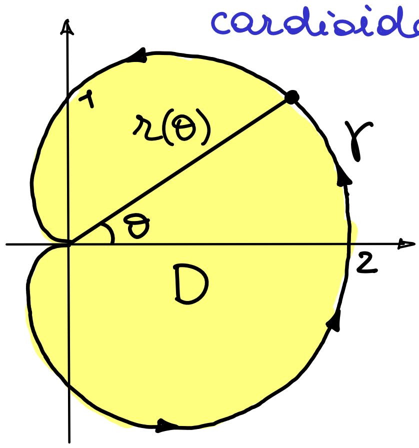
Alla stessa conclusione si può arrivare applicando la formula precedente ottenuta con GG e $\alpha=\beta=1/2$.

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- Calcolare l'area dell'insieme D delimitato dalla curva data da $r(\theta)=1+\cos(\theta)$ per $\theta\in[0,2\pi]$

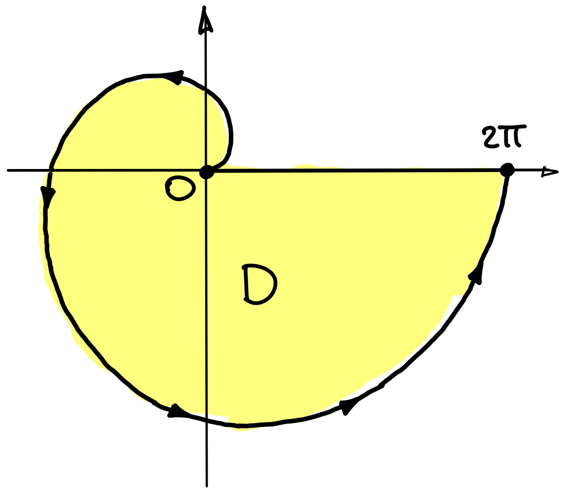
$$|D|=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos(\theta)+\cos^2(\theta)\right)d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left(2\pi+0+\pi\right)=\frac{3\pi}{2}.$$

cardioide



- Calcolare l'area dell'insieme D delimitato dalla curva data da $r(\theta)=\theta$ per $\theta\in[0,2\pi]$ e il segmento $[0,2\pi]$.

$$|D|=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\theta^2\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi}=\frac{4\pi^3}{3}.$$



spirale di Archimede