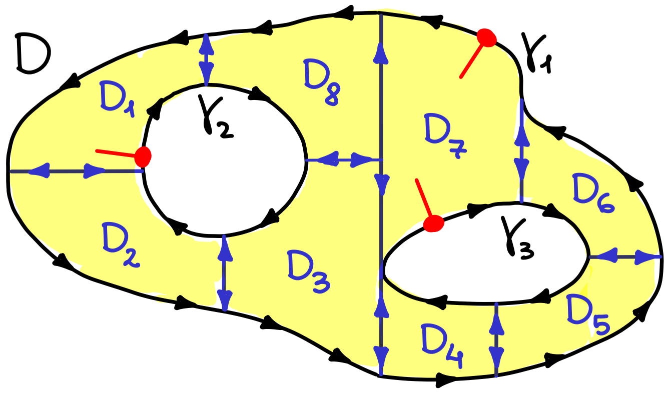
ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 28

FORMULA DI GAUSS-GREEN

La formula di Gauss-Green mette in relazione integrali doppi e integrali curvilinei di seconda specie nel piano.
Prima di enunciare la formula è necessario introdurre qualche definizione.
Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice SEMPLICE se è sia x-semplice che y-semplice. In tal caso ∂D, il bordo di D, è il sostegno di una curva chiusa e si dice ORIENTATO POSITIVAMENTE/NEGATIVAMENTE se il verso di percorrenza è in senso antiorario/orario.
Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice S-DECOMPONIBILE se $D = D_1 \cup \ldots \cup D_N$ con $D_1, \ldots, D_N$ insiemi semplici con le parti interne a due a due disgiunte e $\partial D = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_M$ con $\gamma_1, \ldots, \gamma_M$ sostegni di curve chiuse a due e due disgiunte.



$D = \bigcup_{i=1}^{N} D_i \quad N=8$

$\partial D = \bigcup_{j=1}^{M} \gamma_j \quad M=3$

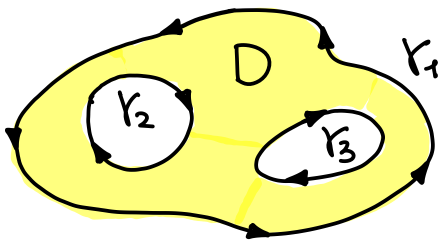
L'orientazione positiva di ∂D si ottiene orientando $\gamma_1, \ldots, \gamma_M$ in modo che percorrendole, D venga lasciato sempre a sinistra.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DI GAUSS-GREEN)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme s-decomponibile e sia $\vec{F}=(F_1,F_2)$ un campo vettoriale C^1 in D.
Allora vale la formula

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

dove con $\partial^+ D$ si intende ∂D orientato positivamente.



$\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$

dim. La dimostrazione è divisa in 4 passi.

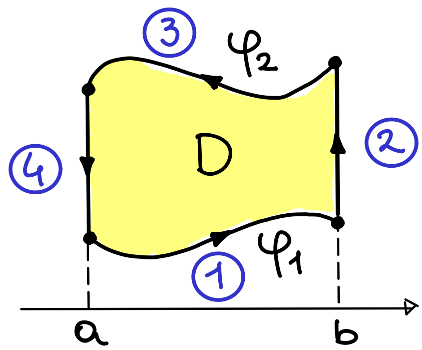
1) Se D è y-semplice allora

$$-\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx\,dy = \int_{\partial^+ D} \langle (F_1, 0), d\vec{s} \rangle .$$

Abbiamo che

$$D = \{(x,y) : x \in [a,b],\ y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\}$$

con $\varphi_1, \varphi_2 \in C([a,b])$.



Allora

$$-\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx\,dy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial F_1}{\partial y}\, dy \right) dx$$

$$\overset{\text{TFCI}}{=} \int_{x=a}^{b} \Big[-F_1(x,y) \Big]_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = \int_a^b \big(F_1(x,\varphi_1(x)) - F_1(x,\varphi_2(x)) \big)\, dx \quad (*).$$

Inoltre

$$\int_{\partial^+ D} \langle (F_1, 0), d\vec{s}\rangle = \int_a^b F_1(t,\varphi_1(t))\cdot \underbrace{(t)'}_{1} dt + \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} F_1(b,t)\cdot \underbrace{(b)'}_{0} dt$$

$$+ \int_b^a F_1(t,\varphi_2(t))\cdot \underbrace{(t)'}_{1} dt + \int_{\varphi_2(a)}^{\varphi_1(a)} F_1(a,t)\cdot \underbrace{(a)'}_{0} dt$$

$$= \int_a^b F_1(t,\varphi_1(t))\, dt - \int_a^b F_1(t,\varphi_2(t))\, dt = (*).$$

2) Se D è x-semplice allora

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy = \int_{\partial^+ D} \langle (0, F_2), d\vec{s}\rangle.$$

manca il segno − perchè lo scambio di x con y inverte l'orientazione di ∂D

Si dimostra in modo simile a 1).

3) Se D è semplice valgono 1) e 2) e sommando le due uguaglianze membro a membro si ha che vale la formula di Gauss-Green (GG)

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx dy = \int_{\partial^+ D} \langle (F_1, F_2), d\vec{s}\rangle.$$

4) La formula di GG vale se D è s-decomponibile. Infatti se $D = D_1 \cup \ldots \cup D_N$ con D_i semplice per $i = 1, \ldots, N$, allora

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx dy \overset{D = D_1 \cup \ldots \cup D_N}{=} \sum_{i=1}^{N} \iint_{D_i} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx dy$$

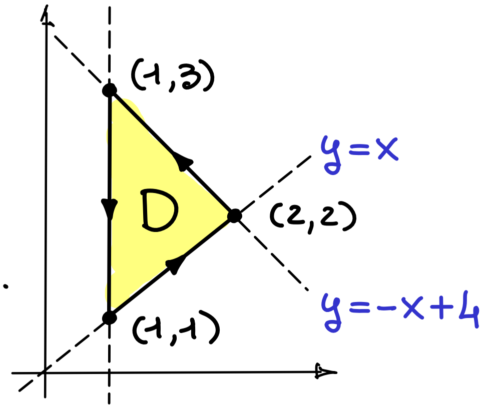
$$\overset{3)}{=} \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial^+ D_i} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \sum_{j=1}^{M} \int_{\gamma_j} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle \overset{\partial D = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_M}{=} \int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle.$$

i segmenti in comune vengono percorsi in entrambi i sensi e il loro contributo è nullo

$\square$

ESEMPI

- Calcolare $\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove $\vec{F}(x,y) = (x^2+y^2+y, (x+y)^2)$ e γ è la curva data dal bordo del triangolo di vertici $(1,1), (2,2), (1,3)$ percorso in senso antiorario.



Invece di calcolare direttamente $\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ applichiamo GG. Abbiamo che

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2(x+y) - (2y+1) = 2x-1.$$

Inoltre se $D = \{(x,y) : x \in [1,2], x \leq y \leq -x+4\}$ allora $\partial^+ D$ è γ con l'orientazione richiesta. Quindi

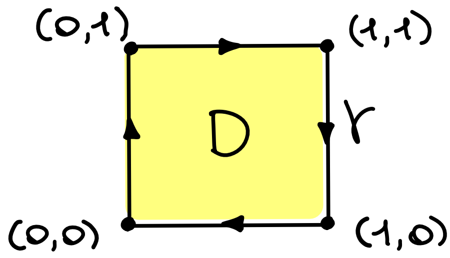
$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \overset{GG}{=} \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$= \int_{x=1}^{2} \left(\int_{y=x}^{-x+4} (2x-1)\, dy \right) dx = \int_1^2 (2x-1) \cdot (-x+4-x)\, dx$$

$$= \int_1^2 (-4x^2+10x-4)\, dx = \left[-\frac{4x^3}{3} + 5x^2 - 4x \right]_1^2$$

$$= \left(-\frac{32}{3} + 20 - 8 \right) - \left(-\frac{4}{3} + 5 - 4 \right) = \frac{5}{3}.$$

• Calcolare $\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{1+y}, x^2y+2\right)$ e γ è il bordo di $D=[0,1]\times[0,1]$ percorso due volte in senso orario.



Dato che $1+y \neq 0$ in D possiamo applicare GG:

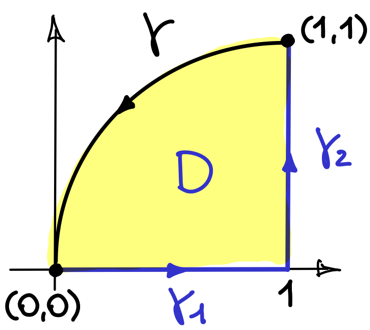
$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = -2\int_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \overset{GG}{=} -2\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= -2\iint_D \left(2xy + \frac{x}{(1+y)^2}\right) dx\,dy$$

$$= -2\int_0^1 x\,dx \cdot \int_0^1 \left(2y + \frac{1}{(1+y)^2}\right) dy$$

$$= -\cancel{2}\left[\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_0^1 \cdot \left[y^2 - \frac{1}{1+y}\right]_0^1 = -\left(1-\frac{1}{2}\right) + (0-1) = -\frac{3}{2}.$$

• Calcolare $\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove $\vec{F}(x,y) = (-y^3, x^3)$ e γ è l'arco di circonferenza centrata in $(1,0)$, percorso da $(1,1)$ a $(0,0)$ nel primo quadrante.



Calcolo diretto:

$\vec{\gamma}(t) = (1+\cos t, \operatorname{sen} t)$ con $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-(\operatorname{sen} t)^3(-\operatorname{sen} t) + (1+\cos t)^3 \cos t\right) dt \overset{\text{calcolo lungo}}{=} ?$$

Alternativa: "chiudere" γ e usare GG:

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy - \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle$$

con $\vec{\gamma}_1(t) = (t, 0)$ e $\vec{\gamma}_2(t) = (1, t)$ per $t \in [0,1]$ e

$$D = \left\{(x,y) : x \in [0,1],\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-(x-1)^2}\right\}$$

così $\partial^+ D$ è $\gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ con le orientazioni date.

Allora

$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \int_0^1 (-0^3 \cdot 1 + t^3 \cdot 0)\,dt = 0$$

$$\int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \int_0^1 (-t^3 \cdot 0 + 1^3 \cdot 1)\,dt = 1$$

e

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy = 3 \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= 3 \iint \left((u+1)^2 + v^2\right) du\,dv$$

$\begin{cases} u = x-1 \\ v = y \end{cases}$ $\left\{\begin{matrix} u^2+v^2 \leq 1 \\ v \geq 0,\ u \leq 0 \end{matrix}\right\}$ $\quad u^2+v^2+1+2u$

$$\overset{CP}{=} 3 \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\rho=0}^{1} (\rho^2 + 1 + 2\rho\cos\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= 3 \cdot \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 + \overset{2}{\cancel{6}} \left[\frac{\rho^3}{\cancel{3}}\right]_0^1 \cdot \left[\operatorname{sen}\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi}{4} + 2(-1) = \frac{9\pi}{8} - 2.$$

Conclusione: $\displaystyle\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \frac{9\pi}{8} - 2 - 0 - 1 = \frac{9\pi}{8} - 3.$