ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 26

ESEMPI

- Sia $\vec{F}(x,y)=(xy+x+y,y)$ per $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$?

No, perché $\vec{F}$ non è irrotazionale:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=x+1\neq\frac{\partial F_2}{\partial x}=0 \qquad \forall x\neq-1,\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Esiste una curva chiusa $\vec{\gamma}$ tale che $\int_\gamma\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle=0$?

Proviamo con una circonferenza "generica":

$$\vec{\gamma}(t)=(x_0+r\cos(t),y_0+r\sin(t)) \quad t\in[0,2\pi]$$

dove $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ e $r>0$ sono da stabilire.

Prima di fare il calcolo osserviamo che

$$\vec{F}(x,y)=\vec{F}_1(x,y)+\vec{F}_2(x,y)$$

con $\vec{F}_1(x,y)=((x+1)y,0)$ e $\vec{F}_2(x,y)=(x,y)$. Dato che $\vec{F}_2$ è conservativo con potenziale $U(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}$ si ha

$$\int_\gamma\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle=\int_\gamma\langle\vec{F}_1,d\vec{s}\rangle=\int_0^{2\pi}\langle\vec{F}_1(\vec{\gamma}(t)),\underbrace{\vec{\gamma}'(t)}_{(-r\sin t,\,r\cos t)}\rangle dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(x_0+1+r\cos t)(y_0+r\sin t)\cdot(-r\sin t)dt$$

$$=-ry_0(x_0+1)\int_0^{2\pi}\sin t\,dt-r^2(x_0+1)\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt$$

$$-r^2y_0\int_0^{2\pi}\cos t\sin t\,dt-r^3\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t\,dt$$

$$=0-r^2(x_0+1)\pi+0+0.$$

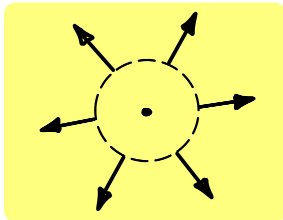
Quindi $\int_\gamma\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle=0$ per ogni circonferenza $\vec{\gamma}$ con centro $(-1,y_0)$ e raggio $r>0$.

OSSERVAZIONE

Ogni campo vettoriale $(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n))$ dove per $i=1,\ldots,n$, la componente F_i è C^1 e dipende SOLO dalla variabile x_i è conservativo con potenziale

$$U(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \int F_i(x_i)\,dx_i .$$

- Sia $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ per $(x,y)\neq(0,0)$.



$\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$?

$\vec{F}$ è irrotazionale perché

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$$

Dato che $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso non possiamo concludere che $\vec{F}$ è conservativo in tutto $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, ma ad esempio è conservativo nei semipiani $\{(x,y): x>0\}$, $\{(x,y): y<0\}$ che invece sono semplicemente connessi.

Proviamo a determinare un potenziale U ossia risolviamo le equazioni

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad e \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Dalla seconda integrata rispetto a y si ha

$$\int \frac{y}{x^2+y^2}\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ t=x^2+y^2 \\ dt=2y\,dy}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\log|t| + c(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+c(x)}_{\substack{\| \\ U(x,y)}}.$$

Verifichiamo la prima

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+c(x)\right) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}(x^2+y^2)} + c'(x) \overset{?}{=} \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Da cui $c'(x)=0$ ossia c è costante. Dunque

$$U(x,y)=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+c=\log(\|(x,y)\|)+c$$

è un potenziale di $\vec{F}$ in tutto $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
$\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

OSSERVAZIONE
Ogni campo vettoriale della forma

$$\vec{F}(\vec{x})=g(\|\vec{x}\|)\cdot\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right) \quad \forall\,\vec{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$$

VERSORE RADIALE

con $g\in C(\mathbb{R}^+)$ si dice CENTRALE ed è conservativo in $\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$ con potenziale

$$U(\vec{x})=G(\|\vec{x}\|)$$

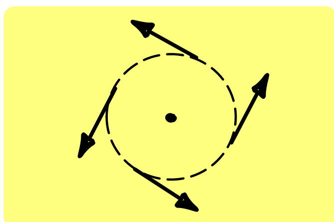
dove G è una primitiva di g. Infatti, per $i=1,\dots,n$,

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\vec{x})=G'(\|\vec{x}\|)\,\frac{\partial(\|\vec{x}\|)}{\partial x_i}=g(\|\vec{x}\|)\,\frac{x_i}{\|\vec{x}\|}=F_i(\vec{x}).$$

Nell'esempio precedente $g(r)=\frac{1}{r}$ e $G(r)=\log(r)+c$.

- Sia $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ per $(x,y)\neq(0,0)$.

$\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$?



No, perché se $\vec{\gamma}(t)=(r\cos t, r\sin t)$ con $t\in[0,2\pi]$ allora

$$\int_\gamma\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\cancel{r}\sin t}{\cancel{r^2}}\cdot(-\cancel{r}\sin t)+\frac{\cancel{r}\cos t}{\cancel{r^2}}\cdot(\cancel{r}\cos t)\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=2\pi\neq0$$ non dipende da r

$\vec{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{-(x^2+y^2)+y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \forall (x,y)\neq(0,0)$$

Quindi $\vec{F}$ è conservativo in ogni insieme semplicemente connesso contenuto in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Proviamo a determinare un potenziale U

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2} \quad e \quad \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

Dalla prima integrata rispetto a x

$$\int\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} -\int\frac{y}{y^2/t^2+y^2}\left(-\frac{y}{t^2}\right)dt=\int\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

se $x\neq 0$ $\quad t=y/x$, $\quad x=y/t$, $\quad dx=-y/t^2\,dt$

$$=\operatorname{arctg}(t)+c(y)$$

$$=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+c(y)=U(x,y)$$

Verifichiamo la seconda

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+c(y)\right)=\frac{1/x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+c'(y)\overset{?}{=}\frac{x}{x^2+y^2}$$

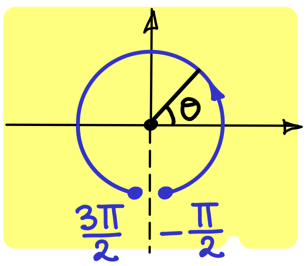
da cui $c'(y)=0$ ossia c è costante.

$$U(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+c$$

è un potenziale di $\vec{F}$ in $\{(x,y):x>0\}\cup\{(x,y):x<0\}$.

Si verifica che

$$\underbrace{U(x,y)}_{=\theta}=\begin{cases}\operatorname{arctg}(y/x) & se\ x>0\\ \pi/2 & se\ x=0\ e\ y>0\\ \operatorname{arctg}(y/x)+\pi & se\ x<0\end{cases}$$



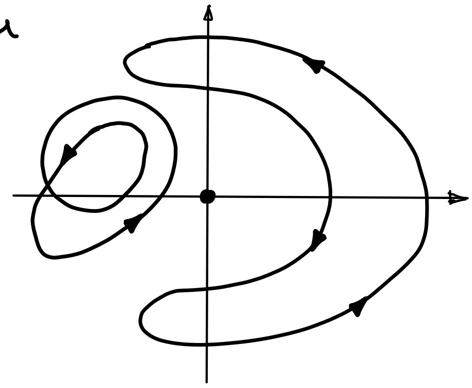
è un potenziale di $\vec{F}$ in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,y):y\leq 0\}$.

Qualche altra osservazione sul campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

1) Se una curva chiusa $\vec{\gamma}$ non si "avvolge" intorno a $(0,0)$ allora

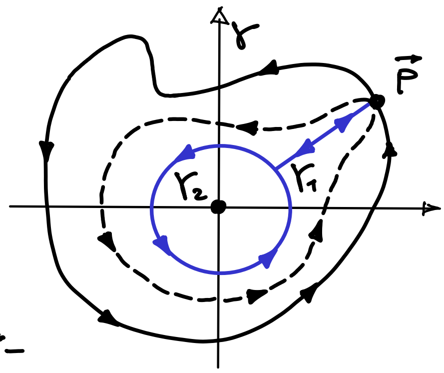
$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = 0.$$



Motivo: esiste un insieme semplicemente connesso che contiene γ e non $(0,0)$ dove $\vec{F}$ è conservativo.

2) Se una curva chiusa e semplice $\vec{\gamma}$ si "avvolge" intorno a $(0,0)$ in senso antiorario allora

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = 2\pi.$$



Motivo: $\vec{\gamma}$ è omotopa a $\vec{\gamma_1} \cup \vec{\gamma_2} \cup \vec{\gamma_1}^-$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e visto che $\vec{F}$ è irrotazionale, per l'invarianza omotopica,

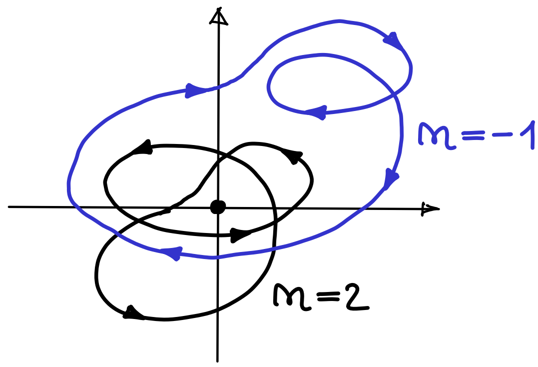
γ_1 è un segmento
γ_2 è una circonferenza

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_1^-} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

$$= \cancel{\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle} + \underbrace{\int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle}^{2\pi} + \cancel{\int_{\gamma_1^-} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle} = 2\pi.$$

3) Se una curva si "avvolge" $m \in \mathbb{Z}$ volte intorno a $(0,0)$ ($m>0$ antiorario, $m<0$ orario) allora

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = m \cdot 2\pi.$$

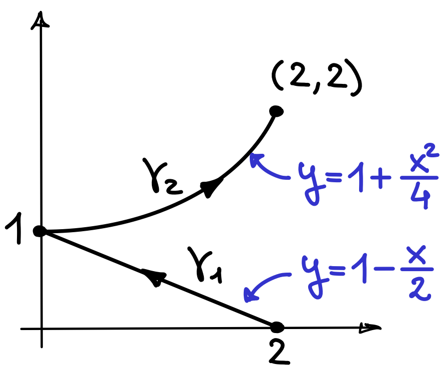


• Sia $\vec{F}(x,y) = \left(y - \frac{4y}{x^2+y^2},\ e^y + \frac{4x}{x^2+y^2}\right)$ per $(x,y) \neq (0,0)$.

Calcolare $\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ con

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ indicati in figura

γ_1 è un segmento, γ_2 è un arco della parabola $y = 1 + \frac{x^2}{4}$.



Notiamo che $\vec{F} = \vec{F_1} + 4\vec{F_2} + \vec{F_3}$:

$\vec{F_1}(x,y) = (y, 0)$ non irrotazionale $\Rightarrow$ non conservativo

$\vec{F_2}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ è conservativo nei semplicemente connessi di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (vedi esempio precedente)

$\vec{F_3}(x,y) = (0, e^y)$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$ con $U_3(x,y) = e^y$.

1) $\int_\gamma \langle \vec{F_1}, d\vec{s} \rangle = \int_2^0 \langle (y,0), \vec{\gamma_1}'(t) \rangle dt + \int_0^2 \langle (y,0), \vec{\gamma_2}'(t) \rangle dt$

con $\vec{\gamma_1}(t) = (t, 1 - t/2)$, $t \in [2,0]$ (vedi orientazione)

$\vec{\gamma_2}(t) = (t, 1 + t^2/4)$, $t \in [0,2]$

$$= \int_2^0 \left(1 - \frac{t}{2}\right) \cdot 1\, dt + \int_0^2 \left(1 + \frac{t^2}{4}\right) \cdot 1\, dt = \left[t - \frac{t^2}{4}\right]_2^0 + \left[t + \frac{t^3}{12}\right]_0^2 = \frac{5}{3}.$$

2) γ è contenuta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \leq 0\}$ dove $\vec{F_2}$ ha potenziale U_2 (vedi esempio precedente)

$$\int_\gamma \langle \vec{F_2}, d\vec{s} \rangle = \underbrace{U_2(2,2)}_{\text{arctg}(2/2)} - \underbrace{U_2(2,0)}_{\text{arctg}(0/2)} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

3) $\int_\gamma \langle \vec{F_3}, d\vec{s} \rangle = U_3(2,2) - U_3(2,0) = e^2 - e^0 = e^2 - 1$.

Infine $\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \frac{5}{3} + 4 \cdot \frac{\pi}{4} + e^2 - 1 = \frac{2}{3} + \pi + e^2$.