ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 25

TEOREMA (CARATTERIZZAZIONE DI UN CAMPO CONSERVATIVO)

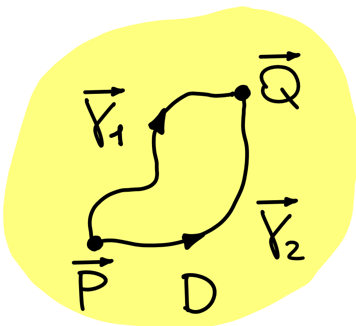
Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e connesso e sia $\vec{F}$ un campo vettoriale continuo in D.
Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) $\vec{F}$ è conservativo in D,
2) $\forall \vec{\gamma} : [a,b] \to D$ curva regolare a tratti e chiusa
$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = 0,$$
3) $\forall \vec{P}, \vec{Q} \in D$ e $\forall \vec{\gamma}_1$ e $\vec{\gamma}_2$ curve regolari a tratti con sostegno in D, punto iniziale $\vec{P}$ e punto finale $\vec{Q}$
$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle.$$

dim.

1) $\Rightarrow$ 2) Se $\vec{F}$ è conservativo allora $\exists U \in C^1(D)$ tale che $\nabla U = \vec{F}$. Allora se $\vec{\gamma}$ è una curva chiusa con sostegno in D,
$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = U(\vec{\gamma}(b)) - U(\vec{\gamma}(a)) \overset{\vec{\gamma}(b) = \vec{\gamma}(a)}{=} 0.$$

2) $\Rightarrow$ 3) Siano $\vec{P}, \vec{Q} \in D$ e siano $\vec{\gamma}_1$ e $\vec{\gamma}_2$ due curve che vanno da $\vec{P}$ a $\vec{Q}$. Allora $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 \cup \vec{\gamma}_2^-$ è una curva chiusa in D e quindi per ipotesi
$$0 = \int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle + \int_{\gamma_2^-} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$
$$= \int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle - \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$



Così
$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle.$$

3) $\Rightarrow$ 1) Fissiamo un punto $\vec{x}_0 \in D$ e definiamo una funzione U in D ponendo $\forall\, \vec{x} \in D$

$$U(\vec{x}) = \int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

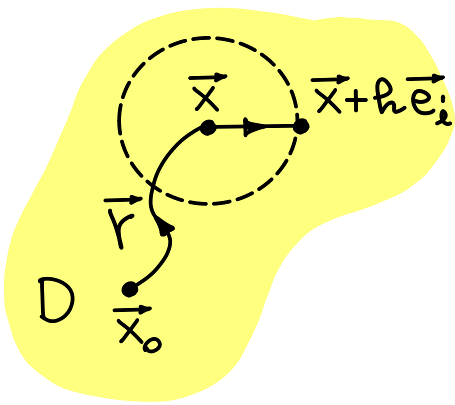
dove $\vec{\gamma}$ è una qualunque curva in D che va da $\vec{x}_0$ a $\vec{x}$. Si noti che esiste almeno una curva in D che unisce $\vec{x}_0$ e $\vec{x}$ perché D è connesso. Inoltre la definizione di U non dipende dalla particolare curva scelta per la proprietà 3).

Verifichiamo che $\nabla U(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x})$ ossia che

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\vec{x}) = F_i(\vec{x}) \quad \text{per } i = 1, 2, .., n.$$

Dato che D è aperto $\exists\, r > 0 : B_r(\vec{x}) \subseteq D$ e per la definizione di U se $0 < |h| < r$

$$U(\vec{x} + h\vec{e}_i) - U(\vec{x}) = \int_{\gamma \cup [\vec{x}, \vec{x} + h\vec{e}_i]} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle - \int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$



$$= \int_{[\vec{x}, \vec{x} + h\vec{e}_i]} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_0^h \langle \vec{F}(\vec{x} + t\vec{e}_i), \vec{e}_i \rangle dt$$

$$= \int_0^h F_i(\vec{x} + t\vec{e}_i)\, dt \underset{\substack{\exists\, t_h \in (0,h) \\ \text{teorema della media integrale}}}{=} h F_i(\vec{x} + t_h \vec{e}_i).$$

Quindi

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{U(\vec{x} + h\vec{e}_i) - U(\vec{x})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} F_i(\vec{x} + t_h \vec{e}_i) \underset{F_i \text{ è continua}}{=} F_i(\vec{x})$$

Così $\vec{F}$ è conservativo con potenziale U. $\square$

Le seguenti definizioni permettono di stabilire un criterio per riconoscere un campo vettoriale conservativo senza doverne determinare una funzione potenziale.

Un campo vettoriale $\vec{F}$ che sia C^1 in $D \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice IRROTAZIONALE in D se

$$\forall \vec{x} \in D \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\vec{x}) \quad \text{per } 1 \leq i < j \leq n.$$

Sia D un aperto connesso in $\mathbb{R}^n$.
Due curve $\vec{\gamma}_0 : [a,b] \to D$ e $\vec{\gamma}_1 : [a,b] \to D$ tali che $\vec{\gamma}_0(a) = \vec{\gamma}_1(a)$ e $\vec{\gamma}_0(b) = \vec{\gamma}_1(b)$ si dicono OMOTOPE in D se esiste una funzione continua

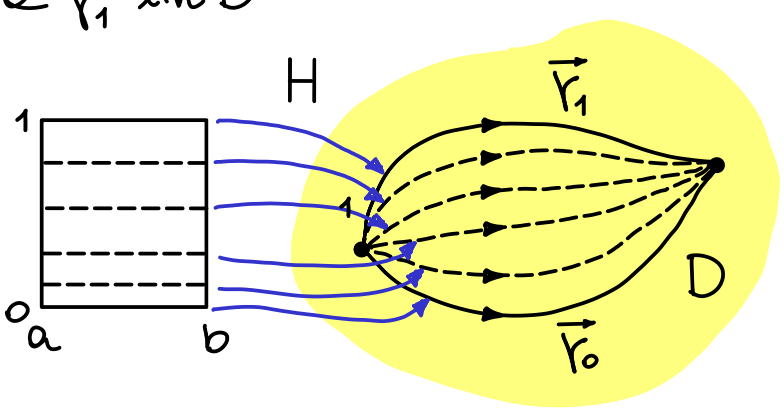
$$H : [a,b] \times [0,1] \to D$$

tale che

$$H(t,0) = \vec{\gamma}_0(t), \quad H(t,1) = \vec{\gamma}_1(t) \quad \forall t \in [a,b]$$

$$H(a,s) = \vec{\gamma}_0(a) = \vec{\gamma}_1(a), \quad H(b,s) = \vec{\gamma}_0(b) = \vec{\gamma}_1(b) \quad \forall s \in [0,1].$$

La funzione H, detta OMOTOPIA descrive come la curva $\vec{\gamma}_0$ viene "deformata con continuità" nella curva $\vec{\gamma}_1$ in D

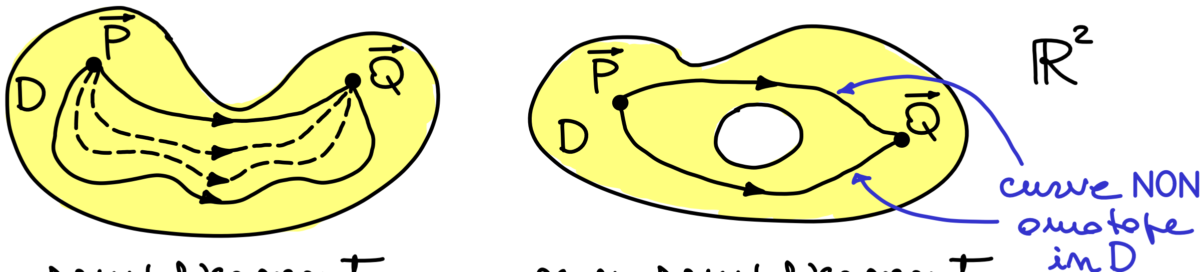


$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (INVARIANZA OMOTOPICA)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e connesso e sia $\vec{F}$ un campo vettoriale irrotazionale in D.
Se $\overline{\gamma}_1$ e $\overline{\gamma}_2$ sono due curve regolari a tratti con gli stessi punti iniziali e finali e omotope in D allora

$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle .$$

Un insieme aperto e connesso $D \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice SEMPLICEMENTE CONNESSO se $\forall \vec{P}, \vec{Q} \in D$ due qualsiasi curve con punto iniziale $\vec{P}$, punto finale $\vec{Q}$ e sostegno in D sono omotope in D.



semplicemente connesso

non semplicemente connesso

OSSERVAZIONI

Ogni insieme aperto e convesso è semplicemente connesso (ad esempio $\mathbb{R}^n$).
In $\mathbb{R}^2$ ogni insieme aperto privato di un numero finito di punti non è semplicemente connesso.
$\mathbb{R}^3$ privato di un numero finito di punti è semplicemente connesso (ad esempio $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$).
$\mathbb{R}^3$ privato di una retta è connesso, ma non è semplicemente connesso (ad esempio $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$).

$\boxed{\text{TEOREMA}}$

Sia $\vec{F}$ un campo vettoriale C^1 in D aperto di $\mathbb{R}^n$.

1) Se $\vec{F}$ è conservativo in D allora $\vec{F}$ è irrotazionale in D.

2) Se $\vec{F}$ è irrotazionale in D e D è semplicemente connesso allora $\vec{F}$ è conservativo in D.

dim.

1) Se $\vec{F}$ è conservativo allora $\exists\, U \in C(D)$ tale che $\nabla U = \vec{F}$ e, per il teorema di Schwarz, se $1 \leq i < j \leq n$,

$$\forall \vec{x} \in D,\ \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) \overset{S}{=} \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x})$$

ossia $\vec{F}$ è irrotazionale.

2) Per la caratterizzazione dei campi conservativi basta far vedere che $\forall \vec{P}, \vec{Q} \in D$ e $\forall \vec{\gamma}_1$ e $\vec{\gamma}_2$ curve regolari a tratti con sostegno in D, punto iniziale $\vec{P}$ e punto finale $\vec{Q}$ si ha

$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle .$$

Questo è vero perché dato che D è semplicemente connesso allora $\vec{\gamma}_1$ e $\vec{\gamma}_2$ sono omotope in D e, visto che $\vec{F}$ è irrotazionale, vale l'invarianza omotopica.

$\square$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$ non è conservativo in $\mathbb{R}^2$ perchè non è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$:
$$-1 = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 1.$$
- $\vec{F}(x,y) = (y^2 + \cos(x), 2xy + y^2)$ con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\vec{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ perchè
$$2y = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 2y.$$
Visto che $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, si ha che $\vec{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$.

Proviamo a determinare un potenziale U:

U deve verificare $\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$ e $\frac{\partial U}{\partial y} = F_2$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = y^2 + \cos(x) \xrightarrow[\text{rispetto a } x]{\text{integro}} U(x,y) = y^2 x + \sin(x) + c(y)$$
dove $c(y)$ è una funzione che dipende solo da y.

Quindi
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 x + \sin(x) + c(y)) \overset{?}{=} 2xy + y^2$$
ossia
$$2xy + c'(y) = 2xy + y^2 \iff c'(y) = y^2 \iff c'(y) = \frac{y^3}{3} + \overset{\text{costante}}{c}.$$
Così
$$U(x,y) = xy^2 + \sin(x) + \frac{y^3}{3} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$
è un potenziale per $\vec{F}$ in $\mathbb{R}^2$.