ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 24

OSSERVAZIONE

Se una curva piana $\vec{\gamma}(t)=(x(t),y(t))$ con $t\in[a,b]$ è data in coordinate polari

$$x(t)=\rho(t)\cos(\theta(t)) \quad e \quad y(t)=\rho(t)\sin(\theta(t))$$

allora il vettore tangente $\vec{\gamma}'(t)$ ha componenti

$$x'(t)=\rho'(t)\cos(\theta(t))-\rho(t)\sin(\theta(t))\cdot\theta'(t)$$

$$y'(t)=\rho'(t)\sin(\theta(t))+\rho(t)\cos(\theta(t))\cdot\theta'(t)$$

e così

$$\|\vec{\gamma}'(t)\|^2=(x'(t))^2+(y'(t))^2=(\rho'(t))^2+(\rho(t)\cdot\theta'(t))^2.$$

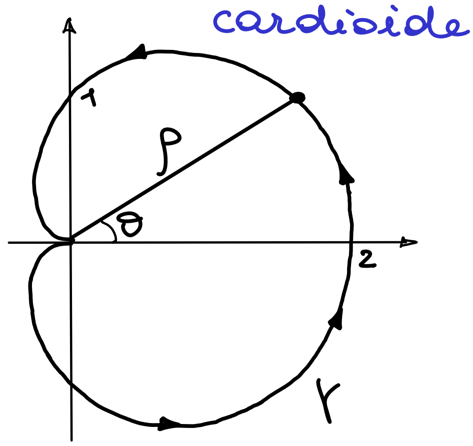
ESEMPIO

- Calcolare la lunghezza della curva che in coordinate polari soddisfa l'equazione

$$\rho=1+\cos(\theta)$$

ossia

$$\rho(t)=1+\cos(t),\ \theta(t)=t,\ t\in[0,2\pi]$$



$$\vec{\gamma}'(\pi)=0$$

$\vec{\gamma}$ è regolare a tratti

$$\|\vec{\gamma}'(t)\|^2=(\rho'(t))^2+(\rho(t)\cdot\theta'(t))^2$$
$$=(-\sin(t))^2+(1+\cos(t))^2$$
$$=\sin^2(t)+1+2\cos(t)+\cos^2(t)$$
$$=2(1+\cos(t))=4\cos^2(t/2)$$

$\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$

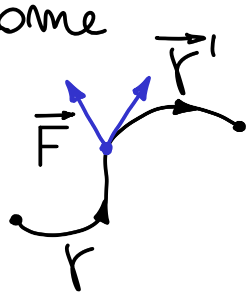
Così

$$|\gamma|=\int_0^{2\pi}\|\vec{\gamma}'(t)\|dt=\int_0^{2\pi}2|\cos(t/2)|dt$$

$$=4\int_0^{\pi}\cos(t/2)dt=8\left[\sin(t/2)\right]_0^{\pi}=8.$$

INTEGRALI CURVILINEI DI SECONDA SPECIE

Sia $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^n$ un CAMPO VETTORIALE
$$\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \ldots, F_n(\vec{x}))$$
continuo in $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\vec{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare tale che $\gamma \subseteq D$. Allora l'INTEGRALE CURVILINEO di $\vec{F}$ lungo $\vec{\gamma}$ è definito come



$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_a^b \langle \vec{F}(\vec{\gamma}(t)), \vec{\gamma}'(t) \rangle dt$$

Se $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 \cup \vec{\gamma}_2 \cup \ldots \cup \vec{\gamma}_N$ è una curva regolare a tratti si pone
$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle .$$

OSSERVAZIONI

1) Se $\vec{\gamma}_1$ e $\vec{\gamma}_2$ sono curve equivalenti allora

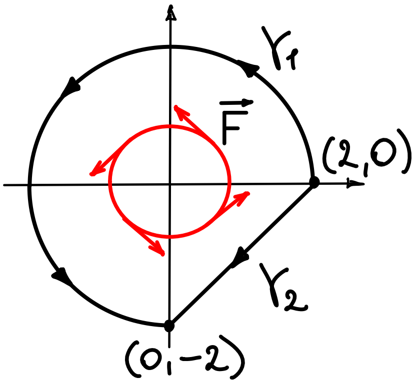
$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$ se le orientazioni di $\vec{\gamma}_1$ e $\vec{\gamma}_2$ sono uguali

$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = -\int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$ se le orientazioni di $\vec{\gamma}_1$ e $\vec{\gamma}_2$ sono opposte

2) Se $\vec{F}$ rappresenta un campo di forze allora l'integrale curvilineo $\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ è il lavoro compiuto per muoversi da $\vec{\gamma}(a)$ a $\vec{\gamma}(b)$ lungo γ.

ESEMPI

- Sia $\vec{F}(x,y)=(-y,x)$ e siano γ_1 e γ_2 le due curve da $(2,0)$ a $(0,-2)$ indicate in figura



Arco di circonferenza:

$\gamma_1(t)=(2\cos(t),2\sin(t))$

per $t\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$.

Segmento:

$\gamma_2(t)=(2,0)+\big((0,-2)-(2,0)\big)t=(2-2t,-2t)$ per $t\in[0,1]$.

Quindi

$$\int_{\gamma_1}\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle=\int_0^{3\frac{\pi}{2}}\Big((-\overset{-2\sin t}{\overset{\|}{y}})\cdot(2\cos(t))'+(\overset{2\cos t}{\overset{\|}{x}})\cdot(2\sin(t))'\Big)dt$$

$$=4\int_0^{3\frac{\pi}{2}}\big(\sin^2(t)+\cos^2(t)\big)dt=6\pi.$$

$$\int_{\gamma_2}\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle=\int_0^1\Big((-\overset{2t}{\overset{\|}{y}})\cdot(2-2t)'+(\overset{2-2t}{\overset{\|}{x}})\cdot(-2t)'\Big)dt$$

$$=4\int_0^1\big(-\cancel{t}+(-1+\cancel{t})\big)dt=-4.$$

γ_2 con orientazione opposta

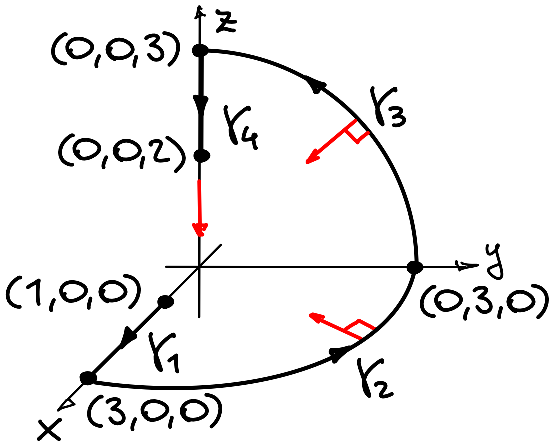
Si noti che $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2^-$ è una curva chiusa, regolare a tratti e

$$\int_{\gamma}\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle=\int_{\gamma_1}\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle-\int_{\gamma_2}\langle\vec{F},d\vec{s}\rangle=6\pi-(-4)=6\pi+4.$$

• Sia per $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

e sia $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 \cup \vec{\gamma}_2 \cup \vec{\gamma}_3 \cup \vec{\gamma}_4$ la curva tale che



$\vec{\gamma}_1(t) = (t,0,0) \quad t \in [1,3]$

$\vec{\gamma}_2(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0) \quad t \in [0,\frac{\pi}{2}]$

$\vec{\gamma}_3(t) = (0, 3\cos t, 3\sin t) \quad t \in [0,\frac{\pi}{2}]$

$\vec{\gamma}_4(t) = (0,0,3-t) \quad t \in [0,1]$

Quindi

$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_1^3 \langle \vec{F}(t,0,0), (1,0,0) \rangle dt = \int_1^3 -\frac{1}{t^2} dt = \left[\frac{1}{t}\right]_1^3 = -\frac{2}{3}$$

$$\int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle \vec{F}(3\cos t, 3\sin t, 0), (-3\sin t, 3\cos t, 0) \rangle dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(-\frac{3\cos t}{3^3} \cdot (-3\sin t) \overbrace{-\frac{3\sin t}{3^3} \cdot (3\cos t)}^{=0 \ \vec{F} \perp d\vec{s}} + 0\Big) dt = 0$$

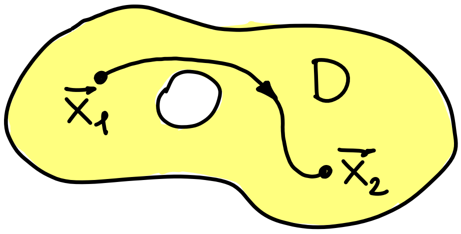
$$\int_{\gamma_3} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \text{calcolo simile} = 0$$

$$\int_{\gamma_4} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_0^1 \langle \vec{F}(0,0,3-t), (0,0,-1) \rangle dt = \int_0^1 \frac{dt}{(3-t)^2} = \left[\frac{1}{3-t}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Infine

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = -\frac{2}{3} + 0 + 0 + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice CONNESSO (PER ARCHI) se $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in D$ $\exists$ una curva $\vec{\gamma}:[a,b] \to D$ tale che $\vec{\gamma}(a)=\vec{x}_1$ e $\vec{\gamma}(b)=\vec{x}_2$



OSSERVAZIONE

Ogni insieme convesso è connesso.

L'insieme $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ non è connesso.

Per $n>1$, l'insieme $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ è connesso, ma non è convesso.

Un campo vettoriale $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^n$ continuo in $D \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice CONSERVATIVO in D se esiste una funzione $U: D \to \mathbb{R}$, $U \in C^1(D)$ tale che

$$\forall \vec{x} \in D, \quad \nabla U(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}).$$

Allora la funzione U si dice POTENZIALE di $\vec{F}$.

OSSERVAZIONI

1) Se U è un potenziale per $\vec{F}$ allora $\forall c \in \mathbb{R}$ la funzione $U+c$ è un potenziale per $\vec{F}$

$$\nabla(U+c) = \nabla U = \vec{F}.$$

Se D è connesso e U e V sono due potenziali di $\vec{F}$ in D allora U e V differiscono per una costante $c \in \mathbb{R}$.

2) Se $\vec{F}$ è conservativo in D con potenziale U allora per ogni curva $\vec{\gamma}:[a,b]\to D$ regolare a tratti

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \int_a^b \langle \vec{F}(\vec{\gamma}(t)), \vec{\gamma}'(t)\rangle dt$$

$$\overset{\vec{F}=\nabla U}{=} \int_a^b \frac{d}{dt}\left(U(\vec{\gamma}(t))\right)dt = U(\vec{\gamma}(b)) - U(\vec{\gamma}(a))$$

ossia l'integrale curvilineo di F lungo $\vec{\gamma}$ è uguale alla variazione di U agli estremi della curva e non dipende dalla curva che li unisce.

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- Il campo vettoriale del primo esempio $\vec{F}(x,y)=(-y,x)$ non è conservativo in $\mathbb{R}^2$ perché $\vec{\gamma}_1$ e $\vec{\gamma}_2$ sono due curve che vanno da $(2,0)$ a $(0,-2)$ ma

$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = 6\pi \neq -4 = \int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle.$$

- Il campo vettoriale del secondo esempio

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

è conservativo in $\mathbb{R}^3/\{(0,0,0)\}$ con potenziale $U(x,y,z)=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$ in quanto $\nabla U = \vec{F}$. Ne segue che PER OGNI $\vec{\gamma}$ da $(1,0,0)$ a $(0,0,2)$ con $\vec{O}\notin\gamma$

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = U(0,0,2) - U(1,0,0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$