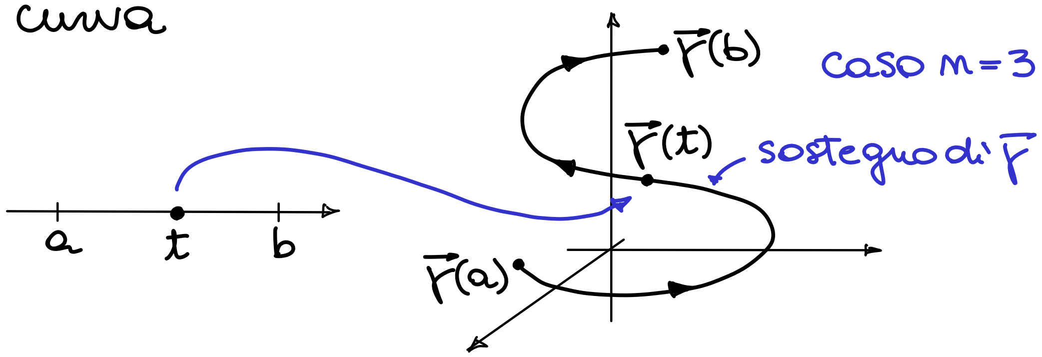
ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 23

CURVE IN $\mathbb{R}^n$

Una CURVA (PARAMETRICA) è una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ a valori in $\mathbb{R}^n$

$$[a,b] \ni t \to \vec{\gamma}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

Se $\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$ la curva si dice CHIUSA.
Se $\vec{\gamma}$ è iniettiva in (a,b) la curva si dice SEMPLICE.
L'insieme immagine $\gamma = \vec{\gamma}([a,b])$ si dice SOSTEGNO della curva

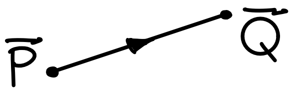


Ogni curva semplice induce un' ORIENTAZIONE del sostegno della curva nel senso del percorso di $\vec{\gamma}(t)$ al crescere del parametro t in $[a,b]$.

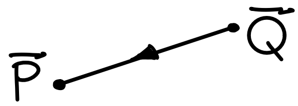
ESEMPI

- Il segmento che unisce i punti $\vec{P}, \vec{Q} \in \mathbb{R}^n$ è il sostegno delle curve

$$\vec{\gamma}_1(t) = \vec{P} + (\vec{Q} - \vec{P})t \,, \quad t \in [0,1]$$

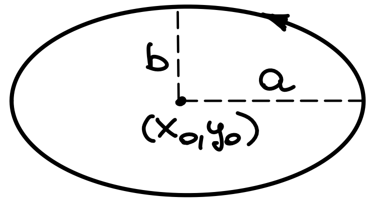


$$\vec{\gamma}_2(t) = \vec{Q} + (\vec{P} - \vec{Q})t \,, \quad t \in [0,1]$$



• In $\mathbb{R}^2$ l'ellisse di equazione

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \quad \text{con } a,b>0$$



è il sostegno della curva

$$\vec{r}(t)=\left(x_0+a\cos(t),\, y_0+b\,\mathrm{sen}(t)\right) \quad t\in[0,2\pi].$$

L'orientazione del sostegno è antioraria.

La curva

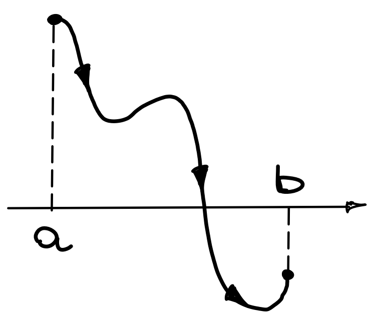
$$\vec{r}(t)=\left(x_0+a\cos(t),\, y_0-b\,\mathrm{sen}(t)\right) \quad t\in[0,2\pi].$$

ha lo stesso sostegno ma orientazione oraria.

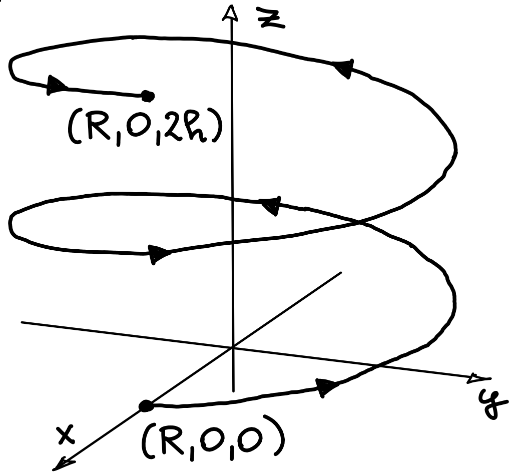
• In $\mathbb{R}^2$ se $f\in C([a,b])$ allora

$$\vec{r}(t)=(t, f(t)) \quad t\in[a,b]$$

è una curva che ha come sostegno il grafico di f in $[a,b]$.



• In $\mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t)=\left(R\cos(2\pi t), R\,\mathrm{sen}(2\pi t), h t\right)$ con $t\in[0,2]$ dove $R>0$ e $h\geq 0$ è una curva che ha come sostegno un'elica.



In particolare questa elica ha 2 spire. Il punto iniziale è $(R,0,0)$ e il punto finale è $(R,0,2h)$.

OSSERVAZIONI

Se $\vec{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ è una curva e $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ è una funzione biunivoca e continua allora

$$[c,d]\ni s\to\vec{\gamma}_2(s)=\vec{\gamma}(\varphi(s))\in\mathbb{R}^n$$

è una curva con lo stesso sostegno di $\vec{\gamma}$.

Allora $\vec{\gamma}_1$ e $\vec{\gamma}_2$ si dicono EQUIVALENTI e φ è il cambio di parametro.

L'orientazione del sostegno di $\vec{\gamma}_2$ è lo stesso di $\vec{\gamma}_1$ se $\varphi(c)=a$, $\varphi(d)=b$ ed è opposta se $\varphi(c)=b$ e $\varphi(d)=a$ (φ è strettamente monotona).

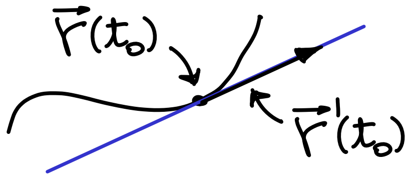
Una curva si dice REGOLARE se $\vec{\gamma}\in C^1([a,b])$ e

$$\vec{\gamma}'(t)=(x_1'(t),x_2'(t),\dots,x_n'(t))\neq\vec{0}\quad\forall t\in[a,b]$$

VETTORE TANGENTE

Allora la RETTA TANGENTE alla curva in $\vec{\gamma}(t_0)$ è

$$\mathbb{R}\ni t\to\vec{\gamma}(t_0)+\vec{\gamma}'(t_0)(t-t_0)$$

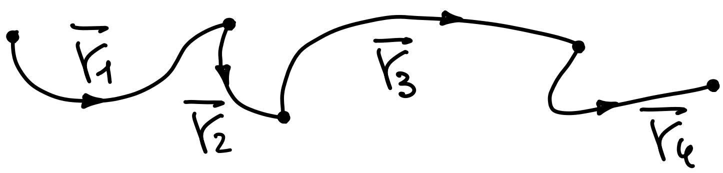


Siano $\vec{\gamma}_1,\dots,\vec{\gamma}_N$ curve regolari tali che

$$\vec{\gamma}_i:[a_i,b_i]\to\mathbb{R}^n \text{ per } i=1,\dots,N$$

tali che $\vec{\gamma}_i(b_i)=\vec{\gamma}_{i+1}(a_{i+1})$ per $i=1,\dots,N-1$.

Allora $\vec{\gamma}=\vec{\gamma}_1\cup\vec{\gamma}_2\cup\dots\cup\vec{\gamma}_N$ è la curva REGOLARE A TRATTI che ha come sostegno l'unione dei sostegni



INTEGRALI CURVILINEI DI PRIMA SPECIE

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\vec{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare tale che $\gamma \subseteq D$. Allora l'INTEGRALE CURVILINEO di f lungo γ è definito come

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \cdot \|\vec{\gamma}\,'(t)\|\,dt.$$

dove $ds = \|\vec{\gamma}\,'(t)\|\,dt$ è l'elemento infinitesimo d'arco.

Inoltre $\int_\gamma 1\,ds = \int_a^b \|\vec{\gamma}\,'(t)\|\,dt = |\gamma|$ è la LUNGHEZZA di γ.

Se $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_1 \cup \vec{\gamma}_2 \cup \ldots \cup \vec{\gamma}_N$ è una curva regolare a tratti:

$$\int_\gamma f\,ds = \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} f\,ds.$$

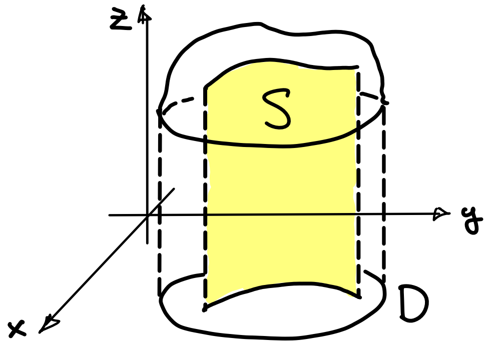
OSSERVAZIONI

1) Se $\vec{\gamma}_1$ e $\vec{\gamma}_2$ sono curve equivalenti allora

$$\int_{\gamma_1} f\,ds = \int_{\gamma_2} f\,ds$$

2) Se $n=2$ e $f \geq 0$ lungo il sostegno di $\vec{\gamma}$ allora $\int_\gamma f\,ds$ è l'area della superficie

$$S = \left\{(x,y,z) : x = x(t),\ y = y(t),\ z \in [0, f(x(t),y(t))],\ t \in [a,b]\right\}$$



$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- Determinare la lunghezza della curva

elica

$$\vec{\gamma}(t) = (R\cos(2\pi t), R\operatorname{sen}(2\pi t), h t) \text{ con } t \in [0,1].$$

Allora

$$\vec{\gamma}'(t) = (R(-\operatorname{sen}(2\pi t)) \cdot 2\pi, R\cos(2\pi t) \cdot 2\pi, h)$$

e

$$\|\vec{\gamma}'(t)\|^2 = (2\pi R)^2 \cdot (\operatorname{sen}^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)) + h^2 = (2\pi R)^2 + h^2.$$

Quindi

$$|\gamma| = \int_0^1 \|\vec{\gamma}'(t)\| dt = \sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}.$$

Se $h=0$ si trova la lunghezza della circonferenza: $2\pi R$.

- $\displaystyle\int_\gamma \frac{xy\operatorname{sen}(y)}{\sqrt{1+x^2}} ds$ con $\vec{\gamma}(t) = (t, \frac{t^2}{2})$ $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$

parte del grafico di $y = \frac{x^2}{2}$

Si ha che

$$\vec{\gamma}'(t) = (1, t) \Rightarrow \|\vec{\gamma}'(t)\| = \sqrt{1+t^2}$$

da cui

$$\int_\gamma \frac{xy\operatorname{sen}(y)}{\sqrt{1+x^2}} ds = \int_0^{\sqrt{2\pi}} \frac{t \cdot \frac{t^2}{2} \operatorname{sen}(\frac{t^2}{2})}{\cancel{\sqrt{1+t^2}}} \cdot \cancel{\sqrt{1+t^2}} dt$$

$u = \frac{t^2}{2}$

$du = t\,dt$

$$= \int_0^\pi u \operatorname{sen}(u) du = \int_0^\pi u\, d(-\cos(u))$$

$$= \left[u(-\cos(u))\right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(u) du$$

$$= \pi + \left[\operatorname{sen}(u)\right]_0^\pi = \pi.$$

• Determinare l'area di

$$S=\left\{(x,y,z) : 0\le x\le 2,\ y=\frac{x^2}{4},\ 0\le z\le 3x\right\}$$

Sia $\vec{\gamma}(t)=\left(t,\frac{t^2}{4}\right)$ con $t\in[0,2]$ allora

$$|S|=\int_\gamma 3x\,ds=\int_0^2 3t\cdot\left\|\left(1,\frac{t}{2}\right)\right\|dt=3\int_0^2 t\sqrt{1+\frac{t^2}{4}}\,dt$$

$u=1+\frac{t^2}{4}$

$du=\frac{t\,dt}{2}$

$$=3\int_1^2 u^{1/2}\cdot 2\,du=\overset{2}{\cancel{6}}\left[\frac{2u^{3/2}}{\cancel{3}}\right]_1^2=8\sqrt{2}-4.$$

Se $\vec{\gamma}$ è una curva regolare in $\mathbb{R}^n$ allora il suo BARICENTRO è il punto $(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n)$ tale che

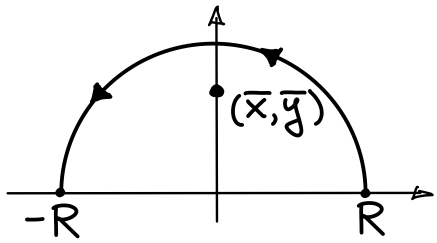
$$\overline{x}_i=\frac{1}{|\gamma|}\int_\gamma x_i\,ds \qquad i=1,\dots,n.$$

• Determinare il baricentro della semicirconferenza $\vec{\gamma}(t)=(R\cos(t),R\sin(t))$ con $t\in[0,\pi]$.

Per simmetria $\overline{x}=0$. Inoltre

$$\vec{\gamma}\,'(t)=(-R\sin(t),R\cos(t))$$

da cui $\|\vec{\gamma}\,'(t)\|=R$.



$$\overline{y}=\frac{1}{\pi R}\int_\gamma y\,ds=\frac{1}{\pi R}\int_0^\pi \cancel{R}\sin(t)\underbrace{\|\vec{\gamma}\,'(t)\|}_{=R}\,dt$$

$$=\frac{R}{\pi}\Big[-\cos(t)\Big]_0^\pi=\frac{2R}{\pi}.$$