ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 22

ESEMPI

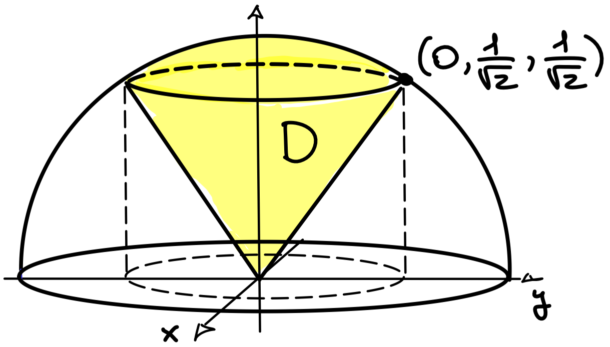
- $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz \qquad D=\left\{(x,y,z):\ \begin{matrix} x^2+y^2+z^2\le 1 \\ z^2\ge x^2+y^2,\ z\ge 0\end{matrix}\right\}.$

sfera

doppio cono

Coordinate sferiche:

$$\Phi^{-1}(D)=\left\{(\rho,\theta,\varphi):\ \begin{matrix}\rho\in[0,1]\\ \theta\in[0,2\pi)\\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{4}]\end{matrix}\right\}$$



$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z^2=x^2+y^2\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2z^2=1 \\ z=\pm\frac{1}{\sqrt2}\end{matrix}$$

$$\overset{CS}{=}\iiint_{\Phi^{-1}(D)} \rho\cdot\rho^2\sin(\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \int_{\rho=0}^{1}\rho^3 d\rho\cdot\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\cdot\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\sin(\varphi)\,d\varphi$$

$$=\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\cdot 2\pi\cdot\left[-\cos(\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt2}+1\right)=\frac{\pi}{4}(2-\sqrt2).$$

- $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot z x^2\,dx\,dy\,dz \qquad D=\left\{(x,y,z):\ \begin{matrix} x^2+y^2+z^2\le 1 \\ z^2\ge x^2+y^2,\ z\ge 0\end{matrix}\right\}$

Coordinate cilindriche:

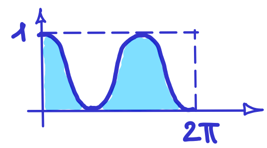
$$\Phi^{-1}(D)=\left\{(\rho,\theta,z):\ \rho\in[0,\tfrac{1}{\sqrt2}],\ \theta\in[0,2\pi],\ \rho\le z\le\sqrt{1-\rho^2}\right\}$$

$$\overset{CC}{=}\iiint_{\Phi^{-1}(D)} \rho\cdot z(\rho\cos\theta)^2\rho\,d\rho\,d\theta\,dz = \underbrace{\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right)}_{=\pi}\int_{\rho=0}^{1/\sqrt2}\rho^4\left(\int_{z=\rho}^{\sqrt{1-\rho^2}} z\,dz\right)d\rho$$

$$=\pi\int_0^{1/\sqrt2}\rho^4\cdot\frac12(1-\rho^2-\rho^2)\,d\rho = \pi\left[\frac{\rho^5}{10}-\frac{\rho^7}{7}\right]_0^{1/\sqrt2}$$

$$=\frac{\pi}{(\sqrt2)^5}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{14}\right)=\frac{\pi\sqrt2}{\cancel{8}\,2}\cdot\frac{\cancel{4}\,1}{140}=\frac{\pi\sqrt2}{280}.$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\pi$$



Sia D un insieme misurabile di $\mathbb{R}^2$ allora il BARICENTRO di D è il punto $(\bar{x},\bar{y})$ tale che

$$\bar{x}=\frac{1}{|D|}\iint_D x\,dx\,dy \quad , \quad \bar{y}=\frac{1}{|D|}\iint_D y\,dx\,dy$$

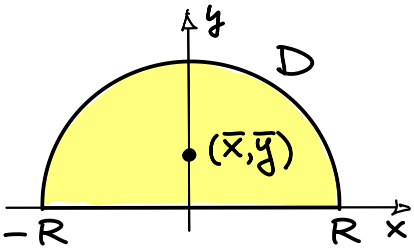
Analogamente se D è un insieme misurabile di $\mathbb{R}^3$ allora il BARICENTRO di D è il punto $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ tale che

$$\bar{x}=\frac{1}{|D|}\iiint_D x\,dx\,dy\,dz\,,\ \bar{y}=\frac{1}{|D|}\iiint_D y\,dx\,dy\,dz\,,\ \bar{z}=\frac{1}{|D|}\iiint_D z\,dx\,dy\,dz\,.$$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- Determinare il baricentro di

$$D=\left\{(x,y):\ x^2+y^2\leq R^2,\ y\geq 0\right\}.$$



Si ha che $|D|=\frac{\pi R^2}{2}$ e

$$\bar{x}=\frac{2}{\pi R^2}\iint_D x\,dx\,dy=0$$

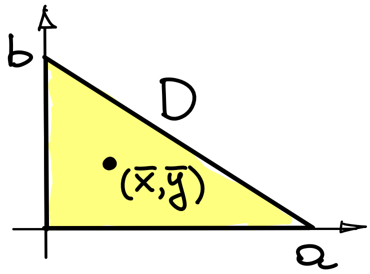
perché $(-x)=-x$ e D è simmetrico rispetto a $x=0$

$$\bar{y}=\frac{2}{\pi R^2}\iint_D y\,dx\,dy \overset{CP}{=} \frac{2}{\pi R^2}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\rho=0}^{R}(\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=\frac{2}{\pi R^2}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{R}=\frac{4R^{\cancel{3}}}{3\pi \cancel{R^2}}=\frac{4R}{3\pi}.$$

• Determinare il baricentro di

$$D=\left\{(x,y):\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}\ \text{con } a,b>0.$$



Si ha che $|D|=\frac{ab}{2}$ e

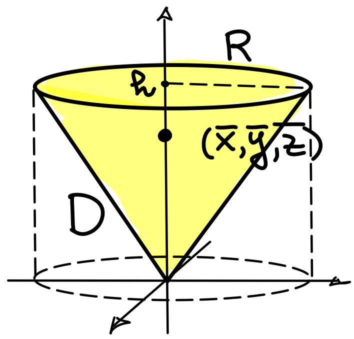
$$\bar{x}=\frac{2}{ab}\iint_D x\,dx\,dy=\frac{2}{ab}\int_{x=0}^{a} x\left(\int_{y=0}^{b(1-\frac{x}{a})} dy\right)dx$$

$$=\frac{2}{ab}\int_0^a x\cdot\cancel{b}\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{2}{a}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3a}\right]_0^a=\frac{a}{3}.$$

Analogamente $\bar{y}=\frac{b}{3}$.

• Determinare il baricentro di

$$D=\left\{(x,y,z):\ \frac{x^2+y^2}{R^2}\leq\frac{z^2}{h^2},\ 0\leq z\leq h\right\}$$



Per simmetria $\bar{x}=\bar{y}=0$ e

$$\bar{z}=\frac{1}{|D|}\iiint_D z\,dx\,dy\,dz\ \text{ con } |D|=\frac{\pi R^2 h}{3}.$$

$\vec{\Phi}$ coordinate cilindriche:

$$\vec{\Phi}^{-1}(D)=\left\{(\rho,\theta,z):\ \begin{matrix}\rho\in[0,R]\\ \theta\in[0,2\pi)\end{matrix},\ \frac{h}{R}\rho\leq z\leq h\right\}$$

$$=\frac{3}{\pi R^2 h}\int_0^{2\pi} d\theta\cdot\left(\int_0^R\left(\int_{h\rho/R}^{h} z\,dz\right)\rho\,d\rho\right)$$

$$=\frac{3}{\cancel{\pi}R^2 h}\cdot\cancel{2}\cancel{\pi}\int_0^R\left[\frac{z^2}{\cancel{2}}\right]_{\frac{h\rho}{R}}^{h}\rho\,d\rho$$

$$=\frac{3}{R^2\cancel{h}}\int_0^R\left(h^{\cancel{2}}-\frac{h^{\cancel{2}}\rho^2}{R^2}\right)\rho\,d\rho$$

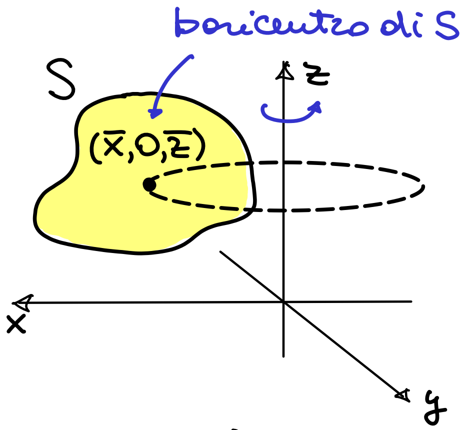
$$=\frac{3h}{R^2}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4R^2}\right]_0^R=\frac{3h}{\cancel{R^2}}\cancel{R^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{3h}{4}.$$

OSSERVAZIONE

Consideriamo il solido D generato dalla rotazione di una regione $S \subseteq \{(x,0,z) : x \geq 0\}$:

$$D = \{(x,y,z) : (\sqrt{x^2+y^2}, 0, z) \in S\}.$$

Il volume di D è dato da



$$|D| = \iiint_D 1\, dx\,dy\,dz \overset{CC}{=} \iiint_{\Phi^{-1}(D)} \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

$$= \iint_S \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\right) \rho\, d\rho\, dz = 2\pi \iint_S \rho\, d\rho\, dz$$

dove

$$\Phi^{-1}(D) = \{(\rho,\theta,z) : \theta \in [0,2\pi],\ (\rho,0,z) \in S\}$$

da cui si ottiene la FORMULA DI PAPPO-GULDINO PER SOLIDI DI ROTAZIONE

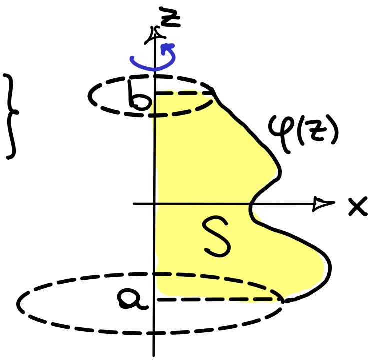
$$|D| = 2\pi \bar{x} \cdot |S| \qquad \bar{x} = \frac{1}{|S|} \iint_S x\, dx\, dz$$

ossia il volume di D è dato dal prodotto della lunghezza della circonferenza descritta dalla rotazione del baricentro di S e dell'area di S.

Nel caso particolare in cui

$$S = \{(x,z) : 0 \leq x \leq \varphi(z),\ a \leq z \leq b\}$$

con $\varphi \in C([a,b])$, si ha che



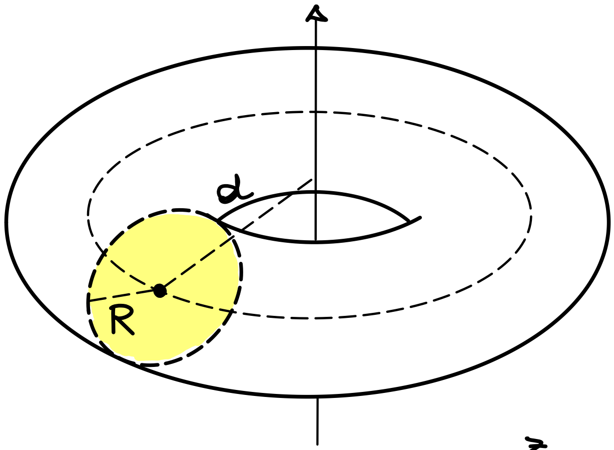
$$|D| = 2\pi \iint_S \rho\, d\rho\, dz$$

$$= 2\pi \int_{z=a}^{b} \left(\int_{\rho=0}^{\varphi(z)} \rho\, d\rho\right) dz = \cancel{2}\pi \int_{z=a}^{b} \left[\frac{\rho^2}{\cancel{2}}\right]_0^{\varphi(z)} dz = \pi \int_a^b \varphi^2(z)\, dz.$$

ESEMPIO

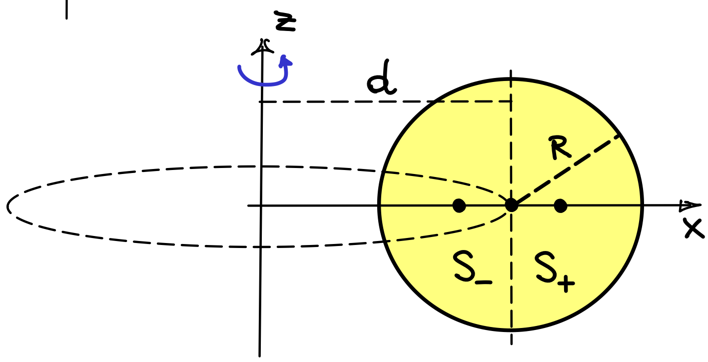
- Ruotando un cerchio di raggio R con il centro a distanza $d > R$ dall'asse z si ottiene un TORO:

$$D = \left\{ (x,y,z) : \left(\sqrt{x^2+y^2} - d\right)^2 + z^2 \le R^2 \right\}$$



Dato che il baricentro del cerchio è il suo centro, ne segue che il volume del toro è

$$|D| = 2\pi d \cdot \pi R^2$$



Si noti che ruotando separatamente i due semicerchi S_+ e S_- si ottengono due solidi D_+ e D_- di volumi diversi: i baricentri di S_+ e S_- sono rispettivamente a distanza $d + \frac{4R}{3\pi}$ e $d - \frac{4R}{3\pi}$ dall'asse z e quindi

vedi baricentro semicerchio

$$|D_+| = 2\pi\left(d + \frac{4R}{3\pi}\right)\pi R^2 \quad \text{e} \quad |D_-| = 2\pi\left(d - \frac{4R}{3\pi}\right)\pi R^2$$

da cui $|D_+| > |D_-|$ e $|D| = |D_+| + |D_-|$.

OSSERVAZIONE

Sia D un solido dove ogni suo punto (x,y,z) ha una certa densità di massa $\delta(x,y,z)$ e una certa velocità $\vec{v}(x,y,z)$ allora l'energia cinetica di D è

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}\iiint_D |\vec{v}(x,y,z)|^2\cdot \overbrace{\delta(x,y,z)dxdydz}^{dm}$$

Nel caso particolare in cui D sia omogeneo (δ= costante) e ruoti attorno ad un asse $\vec{\ell}$ con velocità angolare ω allora

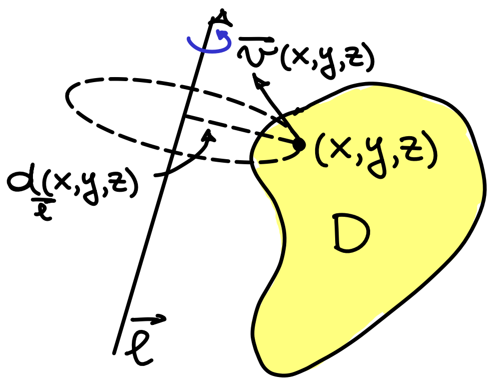
$$|\vec{v}(x,y,z)|=\omega\cdot d_{\vec{\ell}}(x,y,z)$$

distanza di (x,y,z) dall'asse $\vec{\ell}$

e dunque

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}\omega^2\delta\iiint_D d^2_{\vec{\ell}}(x,y,z)dxdydz=\frac{1}{2}I\omega^2$$

dove I è il MOMENTO D'INERZIA di D rispetto a $\vec{\ell}$.



Se $M=\delta|D|$ è la massa di D allora il rapporto I/M dipende solo dalla forma di D e la sua posizione rispetto all'asse di rotazione $\vec{\ell}$:

$$\frac{I}{M}=\frac{1}{|D|}\iiint_D d^2_{\vec{\ell}}(x,y,z)dxdydz$$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- Determinare il rapporto I/M per un cilindro omogeneo rispetto al suo asse.

Sia $D=\{(x,y,z): x^2+y^2\le R^2,\ 0\le z\le h\}$ e sia $\vec{l}$ l'asse z.

$$\frac{I}{M}=\frac{1}{|D|}\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$\overset{CC}{=}\frac{1}{\pi R^2 h}\int_{z=0}^{h}dz\cdot\int_{\theta=0}^{2\pi}d\theta\cdot\int_{\rho=0}^{R}\rho^2\cdot\rho\,d\rho=\frac{\cancel{h}\cdot\cancel{2\pi}\cdot\cancel{R^4}/\cancel{4}}{\cancel{\pi}\cancel{R^2}\cdot\cancel{h}}=\frac{1}{2}R^2.$$

- Determinare il rapporto I/M per una palla omogenea rispetto ad un suo asse.

Sia $D=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le R^2\}$ e $\vec{l}$ l'asse z.

$$\frac{I}{M}=\frac{1}{|D|}\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$\overset{CS}{=}\frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\int_{\rho=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}(\rho\,\mathrm{sen}(\varphi))^2\rho^2\,\mathrm{sen}(\varphi)\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{\frac{4}{3}\cancel{\pi}R^3}\cdot\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^R\cdot 2\cancel{\pi}\cdot\int_0^{\pi}(1-\cos^2(\varphi))\,\mathrm{sen}(\varphi)\,d\varphi$$

$$=\frac{2}{5}R^2\cdot\frac{3}{4}\left[-\cos(\varphi)+\frac{\cos^3(\varphi)}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{5}R^2\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}=\frac{2}{5}R^2.$$