ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 15

ESEMPI

• Sia $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ con

$$\Gamma=\{(x,y,z):\ z=x^2+y^2,\ x+y+2z=2\}.$$

Determinare max/min assoluti di f in Γ.

f è continua in $\mathbb{R}^3$ e Γ è chiuso e limitato.

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2+y^2=1-\frac{x}{2}-\frac{y}{2} \\ (x+\frac{1}{4})^2+(y+\frac{1}{4})^2=\frac{9}{8} \end{array}$$

circonferenza → Γ è limitato!

Poniamo

$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2-z=0,\quad g_2(x,y,z)=x+y+2z-2=0.$$

Regolarità:

$$\begin{bmatrix} g_{1x} & g_{1y} & g_{1z} \\ g_{2x} & g_{2y} & g_{2z} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

il rango non vale $m=2$ se e solo se $\frac{2x}{1}=\frac{2y}{1}=-\frac{1}{2}$ ossia per $(x,y,z)=(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},z)\notin\Gamma$ e quindi tutti i punti di Γ sono regolari.

Moltiplicatori: risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \nabla f=\lambda\nabla g_1+\mu\nabla g_2 \\ g_1=0,\ g_2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x=\lambda 2x+\mu \\ 2y=\lambda 2y+\mu \\ 2z=-\lambda+2\mu \\ x^2+y^2=z \\ x+y+2z=2 \end{cases}$$

Sottraendo $2(x-y)=2\lambda(x-y)$ → $\lambda=1$, $x=y$

$$\begin{cases} \lambda=1 \\ \mu=0 \\ 2z=-1 \\ x^2+y^2=-\frac{1}{2} \\ x+y-1=2 \end{cases} \cup \begin{cases} x=y \\ 2x=2\lambda x+\mu \\ 2z=-\lambda+2\mu \\ 2x^2=z \\ 2x+2z=2 \end{cases}$$

impossibile

$\emptyset$

$2x+4x^2=2$

$2x^2+x-1=0 \Rightarrow x=-1,\ x=\frac{1}{2}$

Quindi i punti stazionari vincolati sono:

$$\boxed{(-1,-1,2)\ ,\ \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)}$$

Dato che f è continua e Γ è compatto per il teorema di Weierstrass i punti di max/min esistono e per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange tali punti sono tra i punti stazionari vincolati. Confrontando i valori si ha che

$$\boxed{f(-1,-1,2)=6} \qquad \boxed{f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{3}{4}} \Rightarrow$$

$(-1,-1,2)$ è un punto di max assoluto

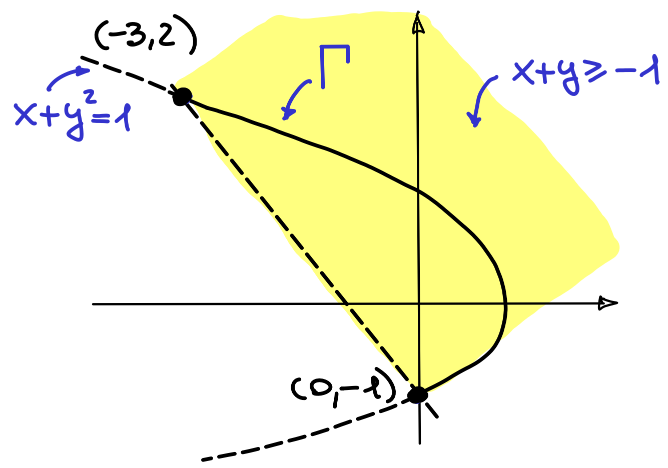
$\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)$ è un punto di min assoluto

- Sia $f(x,y)=xy-y^2$ con

$$\Gamma=\left\{(x,y):\ x+y^2=1,\ x+y\geq -1\right\}.$$

Determinare max/min assoluti di f in Γ.

f è continua in $\mathbb{R}^2$ e Γ è chiuso e limitato.



$$\begin{cases} x+y^2=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$$

$$-y-1+y^2=1$$

$$y^2-y-2=0 \quad \begin{matrix} \nearrow y=-1 \\ \searrow y=2 \end{matrix}$$

$$(0,-1)\ ,\ (-3,2)$$

Sia $g(x,y)=x+y^2-1=0$. $\nabla g(x,y)=(1,2y)\neq(0,0)$.

punti regolari

Punti stazionari vincolati in $g(x,y)=0$:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y)=\lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=\lambda \\ x-2y=\lambda 2y \\ x+y^2-1=0 \end{cases} \begin{array}{l} \to x=2y+2y^2 \\ \to 2y+2y^2+y^2-1=0 \\ \quad 3y^2+2y-1=0 \\ \quad \Rightarrow y=-1,\frac{1}{3} \end{array}$$

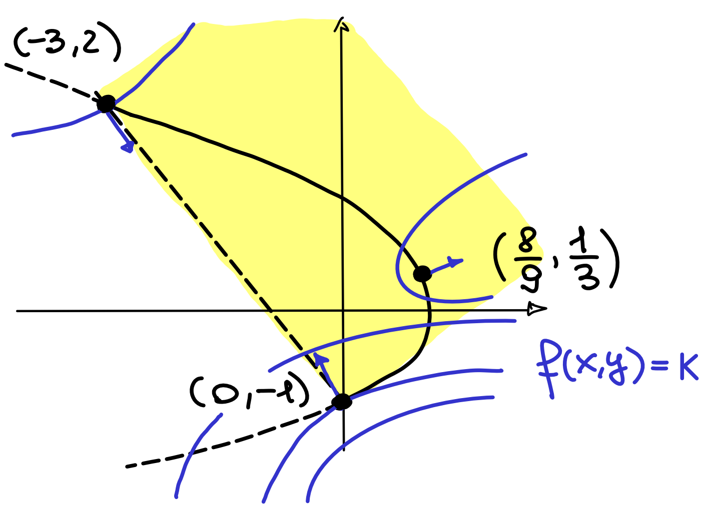
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ \lambda=-1 \\ x=1-y^2=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=\frac{1}{3} \\ \lambda=\frac{1}{3} \\ x=1-y^2=\frac{8}{9} \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{(0,-1)\in\Gamma \quad , \quad \left(\frac{8}{9},\frac{1}{3}\right)\in\Gamma}$$

Per il teorema di Weierstrass f ammette punti di max/min assoluti in Γ. Per trovarli confrontiamo i valori di f nei punti stazionari vincolati a $g=0$ appartenenti a Γ e i punti estremi di Γ ossia $(0,-1)$ e $(-3,2)$:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(0,-1)=-1 \\ f(-3,2)=-10 \\ f\left(\frac{8}{9},\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{27} \end{array}} \Rightarrow \begin{array}{l} \left(\frac{8}{9},\frac{1}{3}\right) \text{ è un punto di max assoluto} \\ (-3,2) \text{ è un punto di min assoluto} \end{array}$$



OSSERVAZIONE

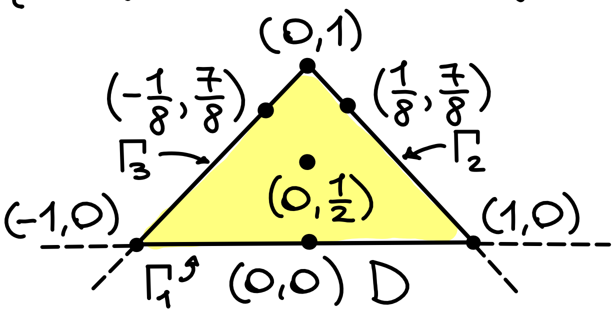
I punti di massimo/minimo assoluto di una funzione continua f in un insieme compatto D la cui esistenza è garantita dal teorema di Weierstrass, vanno individuati tra:

1) i punti di D dove f non è differenziabile;
2) i punti interni di D dove f è differenziabile che sono stazionari;
3) i punti di ∂D.

Se in ∂D si usa il metodo dei moltiplicatori è necessario individuare i punti non regolari e punti stazionari vincolati.

ESEMPI

• Determinare max/min assoluti di $f(x,y) = 3x^2 + y^2 - y$ in $D = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1,\ y \geq 0\}$



D è compatto e $f \in C^2(D)$

Punti stazionari:

$$\nabla f(x,y) = (6x, 2y-1) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0, \tfrac{1}{2})$$

$(0, \frac{1}{2})$ è interno a D e $\boxed{f(0, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}}$

Bordo: $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ dove

$$\Gamma_1 = \{(x,y) : \underbrace{y}_{g_1(x,y)} = 0,\ x \in [-1,1]\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x,y) : \underbrace{x+y-1}_{g_2(x,y)}=0,\ y\in[0,1]\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x,y) : \underbrace{x-y+1}_{g_3(x,y)}=0,\ y\in[0,1]\}$$

I punti non regolari di ∂D sono $(-1,0),(1,0),(0,1)$ e

$$\boxed{f(-1,0)=3,\quad f(1,0)=3,\quad f(0,1)=0}$$

Punti stazionari vincolati: $\begin{cases}\nabla f = \lambda \nabla g_i \\ g_i = 0\end{cases}$ $i=1,2,3$

Γ_1: $\begin{cases}6x=\lambda\cdot 0\\ 2y-1=\lambda\cdot 1\\ y=0\end{cases}$, $\begin{cases}x=0\\ y=0 \in[-1,1]\\ \lambda=-1\end{cases}$

$(0,0)\in\Gamma_1$ e $\boxed{f(0,0)=0}$

Γ_2: $\begin{cases}6x=\lambda\cdot 1\\ 2y-1=\lambda\cdot 1\\ x+y=1\end{cases}$, $\begin{cases}x=\frac{\lambda}{6}\\ y=\frac{\lambda+1}{2}\\ \frac{\lambda}{6}+\frac{\lambda+1}{2}=1\end{cases}$ $\xrightarrow{\lambda+3\lambda+3=6}$ $\begin{cases}x=\frac{1}{8}\\ y=\frac{7}{8}\in[0,1]\\ \lambda=\frac{3}{4}\end{cases}$

$(\frac{1}{8},\frac{7}{8})\in\Gamma_2$ e $\boxed{f(\frac{1}{8},\frac{7}{8})=-\frac{1}{16}}$

Γ_3: $\begin{cases}6x=\lambda\cdot 1\\ 2y-1=-\lambda\cdot 1\\ x-y=-1\end{cases}$, $\begin{cases}x=\frac{\lambda}{6}\\ y=\frac{-\lambda+1}{2}\\ \frac{\lambda}{6}-\frac{-\lambda+1}{2}=-1\end{cases}$ $\xrightarrow{\lambda+3\lambda-3=-6}$ $\begin{cases}x=-\frac{1}{8}\\ y=\frac{7}{8}\in[0,1]\\ \lambda=-\frac{3}{4}\end{cases}$

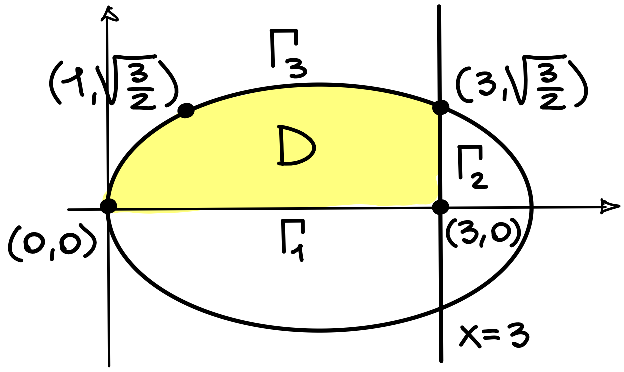
$(-\frac{1}{8},\frac{7}{8})\in\Gamma_3$ e $\boxed{f(-\frac{1}{8},\frac{7}{8})=-\frac{1}{16}}$

Confrontando i valori trovati si conclude che i punti di max assoluto sono $(-1,0)$ e $(1,0)$ con valore 3 e il min assoluto è $(0,\frac{1}{2})$ con valore $-\frac{1}{4}$.

• Determinare max/min assoluti di $f(x,y)=y^2-x$ in $D=\{(x,y): x^2+2y^2-4x\leq 0, y\geq 0, x\leq 3\}$.

Notiamo che $x^2+2y^2-4x=(x-2)^2+2y^2-4\leq 0$

ossia $\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2\leq 1$ ← insieme compatto con bordo l'ellisse di centro $(2,0)$ e semiassi $2,\sqrt{2}$



D è compatto e $f\in C^2(D)$

$\nabla f(x,y)=(-1,2y)=(0,0)$ impossibile!

f non ha punti stazionari.

Bordo: $\partial D=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ dove

$$\Gamma_1=\{(x,y): y=0, x\in[0,3]\}$$

$$\Gamma_2=\{(x,y): x=3, y\in[0,\sqrt{\tfrac{3}{2}}]\}$$

$$\Gamma_3=\{(x,y): \underbrace{x^2+2y^2-4x}_{g(x,y)}=0, x\in(0,3), y>0\}$$

Per Γ_1,Γ_2 possiamo restringere f lungo i vincoli

Γ_1: $f(x,0)=-x$, $(-x)'=-1$

0 − − − − − − 3

$\boxed{f(0,0)=0}$ $\boxed{f(3,0)=-3}$

Γ_2: $f(3,y)=y^2-3$, $(y^2-3)'=2y$

0 + + + + + + $\sqrt{\frac{3}{2}}$

$f(3,0)=-3$ $\boxed{f(3,\sqrt{\tfrac{3}{2}})=-\frac{3}{2}}$

Γ_3: Applichiamo i moltiplicatori

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 = \lambda(2x-4) \\ 2y = \lambda(4y) \\ x^2+2y^2-4x=0 \end{cases}$$

$2y = \lambda(4y) \longrightarrow 2y(1-2\lambda)$, $\;y=0$, $\;\lambda=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y=0 \\ -1=\lambda(2x-4) \\ x^2-4x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda=\frac{1}{2} \\ -1 = x-2 \\ x^2+2y^2-4x=0 \end{cases}$$

$x^2-4x=0 \to x=0,\ x=4$ $\qquad -1 = x-2 \longrightarrow x=1$ $\qquad x^2+2y^2-4x=0 \longrightarrow 2y^2=3$

$(0,0)\quad \lambda=\frac{1}{4}$ $\qquad (1,\sqrt{\frac{3}{2}})\quad \lambda=\frac{1}{2}$

$(4,0)\quad \lambda=-\frac{1}{4}$ $\qquad (1,-\sqrt{\frac{3}{2}})\quad \lambda=\frac{1}{2}$

$(0,0), (4,0)$ e $(1,-\sqrt{\frac{3}{2}}) \notin \Gamma_3$, $(1,\sqrt{\frac{3}{2}}) \notin \Gamma_3$

$$\boxed{f(1,\sqrt{\tfrac{3}{2}})=\tfrac{1}{2}}$$

Confrontando i valori trovati si conclude che $(1,\sqrt{\frac{3}{2}})$ è il punto di massimo assoluto con valore $\frac{1}{2}$ e $(3,0)$ è il punto di minimo assoluto con valore -3.