ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 14

TEOREMA (DELLE FUNZIONI IMPLICITE PER SISTEMI)

Siano $f_1, \dots, f_m \in C^1(A)$ con A insieme aperto di $\mathbb{R}^{n+m}$ e sia $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in A$ tale che

$$\begin{cases} f_1(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = 0 \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = 0 \end{cases}$$

Se

MATRICE JACOBIANA DI $\vec{f}$ RISPETTO A $\vec{y}$

$$\det\left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \right]_{\substack{i=1,\dots,m \text{ righe} \\ j=1,\dots,m \text{ colonne}}} \right) \neq 0$$

allora $\exists\, r, s > 0$ e $\exists$ uniche $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in C^1(B_r(\vec{x}_0))$ tali che $\vec{\varphi}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$,

$(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$

$$\vec{\varphi} : B_r(\vec{x}_0) \to B_s(\vec{y}_0)$$

e

$$\begin{cases} f_1(\vec{x}, \vec{\varphi}(\vec{x})) = 0 \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}, \vec{\varphi}(\vec{x})) = 0 \end{cases} \quad \forall \vec{x} \in B_r(\vec{x}_0)$$

ESEMPIO

- Il sistema

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0 \\ f_2(x,y,z) = x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

è soddisfatto in $(x,y,z) = (2,2,0)$.

La matrice jacobiana di f_1 e f_2 rispetto a y e z è

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xRightarrow{\substack{y=2 \\ z=0}} \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 8 \neq 0.$$

Per il teorema delle funzioni implicite $\exists\, \varphi_1$ e φ_2 funzioni C^1 tali che $\varphi_1(2)=2$, $\varphi_2(2)=0$ e $(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$ soddisfa il sistema $(*)$ $\forall x \in (2-r, 2+r)$ con $r>0$.
Per determinare $\varphi_1'(2)$ e $\varphi_2'(2)$ basta derivare $(*)$ e risolvere il sistema ottenuto. Abbiamo che

$$\begin{cases} x^2+\varphi_1^2(x)+\varphi_2^2(x)-8=0 \\ x+\varphi_1(x)+2\varphi_2(x)-4=0 \end{cases}$$

e derivando rispetto a x si ha

$$\begin{cases} 2x+2\varphi_1(x)\cdot\varphi_1'(x)+2\varphi_2(x)\cdot\varphi_2'(x)=0 \\ 1+\varphi_1'(x)+2\varphi_2'(x)=0 \end{cases}$$

Poniamo $x=2$

$$\begin{cases} 4+4\varphi_1'(2)+0=0 \\ 1+\varphi_1'(2)+2\varphi_2'(2)=0 \end{cases}$$

det $\neq 0$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1'(2) \\ \varphi_2'(2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Quindi risolvendo si ottiene

$$\varphi_1'(2)=-1\,,\quad \varphi_2'(2)=0.$$

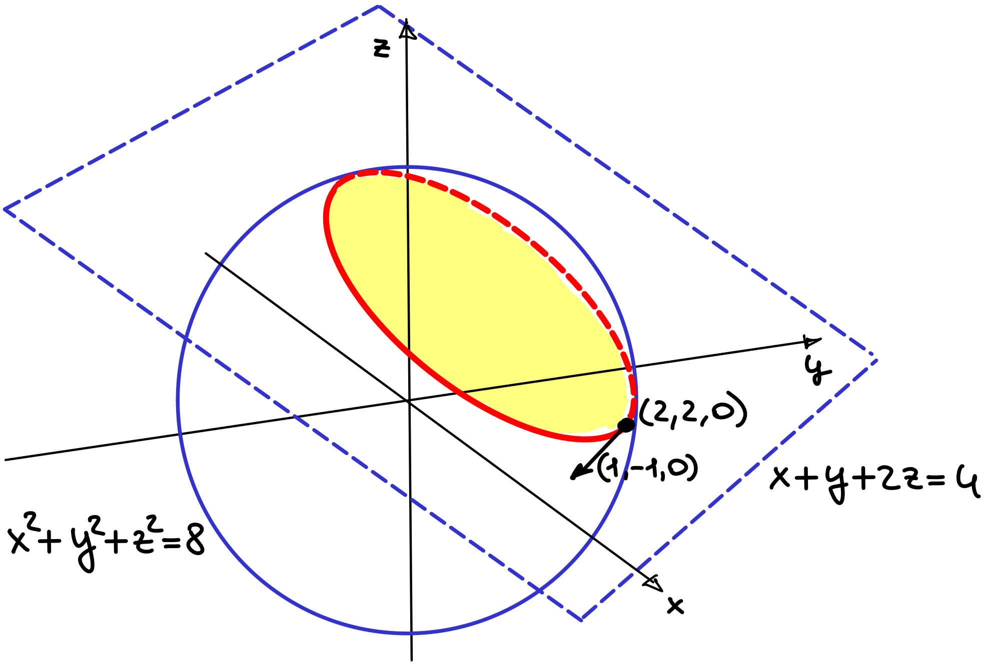
Dal punto di vista geometrico il sistema è l'intersezione tra la sfera $x^2+y^2+z^2=8$ e il piano $x+y+2z=4$ ossia una circonferenza in $\mathbb{R}^3$ di cui $(2,2,0)$ è un punto.
Tale circonferenza "vicino" al punto $(2,2,0)$ è descritta rispetto al parametro x come

$$(2-r, 2+r) \ni x \to (x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \text{ con } r>0.$$

Quindi

$$(\overset{=x'}{1}, \varphi_1'(2), \varphi_2'(2))=(1,-1,0)$$

è un vettore tangente alla circonferenza in $(2,2,0)$.



MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\Gamma \subseteq D$.
$\vec{x}_0 \in \Gamma$ si dice PUNTO DI MASSIMO (MINIMO) ASSOLUTO VINCOLATO A Γ se

$$\forall \vec{x} \in \Gamma \quad f(\vec{x}) \underset{(\geq)}{\leq} f(\vec{x}_0)$$

$\vec{x}_0 \in \Gamma$ si dice PUNTO DI MASSIMO (MINIMO) RELATIVO VINCOLATO A Γ se

$$\exists r>0 : \forall \vec{x} \in B_r(\vec{x}_0) \cap \Gamma \quad f(\vec{x}) \underset{(\geq)}{\leq} f(\vec{x}_0)$$

OSSERVAZIONE

Siano Γ_1, Γ_2 due vincoli con $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq D$.
Se $\vec{x}_0 \in \Gamma_1$ è un punto di max/min assoluto /relativo vincolato a Γ_2 allora lo è anche vincolato Γ_1. Non vale il viceversa.

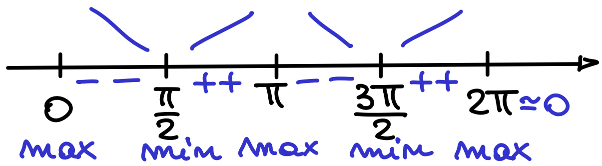
ESEMPIO

• Sia $f(x,y) = x^2 - y^2$.

1) Vincolato a $\Gamma = \{(x,y) : y = 0\}$, $(0,0)$ è un punto di minimo assoluto:
$$\forall (x,y) \in \Gamma \quad f(x,0) = x^2 \geq f(0,0) = 0.$$

2) Vincolato a $\Gamma = \{(x,y) : x = 0\}$, $(0,0)$ è un punto di massimo assoluto:
$$\forall (x,y) \in \Gamma \quad f(0,y) = -y^2 \leq f(0,0) = 0.$$

3) Vincolato a $\Gamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ si ha che posto $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi]$
$$g(\theta) = f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos(2\theta)$$
$$g'(\theta) = 2\operatorname{sen}(2\theta)$$



Quindi
$$(\cos(0), \operatorname{sen}(0)) = (1,0) \quad (\cos(\pi), \operatorname{sen}(\pi)) = (-1,0)$$
sono punti di massimo assoluto con valore
$$f(1,0) = f(-1,0) = 1$$
mentre
$$(\cos(\tfrac{\pi}{2}), \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2})) = (0,1) \quad (\cos(\tfrac{3\pi}{2}), \operatorname{sen}(\tfrac{3\pi}{2})) = (0,-1)$$
sono punti di minimo assoluto con valore
$$f(0,1) = f(0,-1) = -1.$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE)

Siano $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(A)$ con A aperto di $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq m < n$.
Sia $\vec{x}_0$ un punto di max/min relativo vincolato a

$$\Gamma = \{\vec{x} \in A : g_i(\vec{x}) = 0 \text{ per } i = 1, \dots, m\}.$$

Se $\vec{x}_0$ è un PUNTO REGOLARE di Γ ossia

rango

$$rg\left(\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)\right]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}\right) = m$$

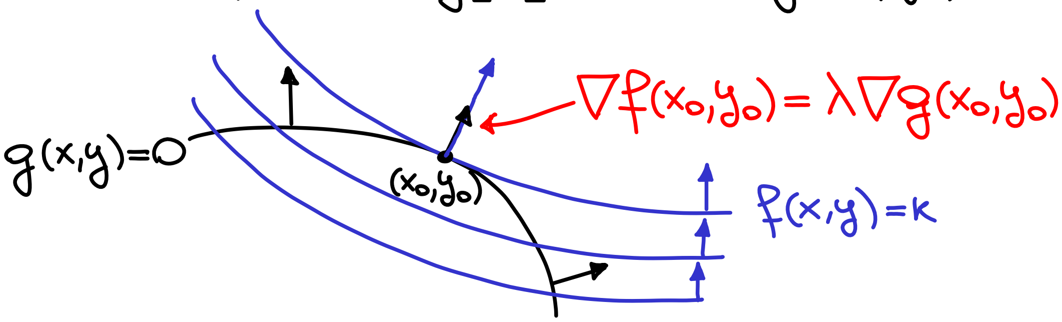
$\exists$ un minore $m \times m$ con determinante $\neq 0$

allora $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ detti MOLTIPLICATORI tali che

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\vec{x}_0)$$

ossia $\vec{x}_0$ è un PUNTO STAZIONARIO VINCOLATO.

dim. Caso $n=2$, $m=1$. $rg[\cdots] = 1 \Rightarrow \nabla g(x_0,y_0) \neq (0,0)$.



Supponiamo che $g_y(x_0,y_0) \neq 0$ (simile se $g_x(x_0,y_0) \neq 0$)
Per il teorema delle funzioni implicite $\exists\, r > 0$ e $\exists\, \varphi \in C^1((x_0-r, x_0+r))$ tale che $\varphi(x_0) = y_0$ e

$$g(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in (x_0-r, x_0+r)$$

con

$$\varphi'(x_0) = -\frac{g_x(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)} \qquad (*)$$

Consideriamo la funzione $C^1((x_0-r, x_0+r))$

$$h(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Dato che (x_0,y_0) è un punto di max/min relativo di f vincolato a $g(x,y)=0$, x_0 è un punto di max/min relativo di h in (x_0-r, x_0+r).
Allora per il teorema di Fermat in una variabile
$$h'(x_0)=0.$$
Calcoliamo la derivata prima di h:
$$h'(x)=f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)$$
e quindi per $x=x_0$ e $(*)$ si ha
$$h'(x_0)=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\left(-\frac{g_x(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)}\right)$$
Ponendo $\lambda=\dfrac{f_y(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)}$ si ottiene
$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)=\lambda g_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0)=\lambda g_y(x_0,y_0)\end{cases} \iff \nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0)$$

$\square$

OSSERVAZIONE
Per il teorema le condizioni necessarie da soddisfare sono
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0)-\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)=0 & \text{per } j=1,\dots,n \\ g_i(\vec{x}_0)=0 & \text{per } i=1,\dots,m\end{cases}$$
In altre parole $(\vec{x}_0,\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\mathbb{R}^{n+m}$ è un punto stazionario della funzione
$$\mathcal{L}(\vec{x},\lambda_1,\dots,\lambda_m)=f(\vec{x})-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\vec{x})$$
detta LAGRANGIANA.

ESEMPIO

- Sia $f(x,y)=x^2-y^2$ con $\Gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.

Determinare max/min assoluti di f in Γ.

Poniamo $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$ allora

$$\nabla g(x,y)=(2x,2y)=(0,0) \Rightarrow (x,y)=(0,0)\notin\Gamma$$

tutti i punti di Γ sono regolari. Per determinare i punti stazionari vincolati risolviamo il sistema

$$\begin{cases}\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)\\ g(x,y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=\lambda 2x\\ -2y=\lambda 2y\\ x^2+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(1-\lambda)=0\\ y(1+\lambda)=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

da cui

Punti stazionari vincolati:

$$\begin{cases}x=0\\ y(1+\lambda)=0\\ y^2=1\end{cases} \cup \begin{cases}\lambda=1\\ y=0\\ x^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}(x,y)=\boxed{(0,\pm1)}, \lambda=-1\\ (x,y)=\boxed{(\pm1,0)}, \lambda=1\end{matrix}$$

Dato che f è continua e Γ è compatto per il teo. di Weierstrass, f ammette in Γ punti di max/min. assoluto. Confrontando i valori nei punti stazionari vincolati $\boxed{f(\pm1,0)=1}$ e $\boxed{f(0,\pm1)=-1}$ si deduce che $(\pm1,0)$ sono punti di massimo assoluto e $(0,\pm1)$ sono punti di minimo assoluto.