ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 13

ALCUNI ESERCIZI DEL FOGLIO 3

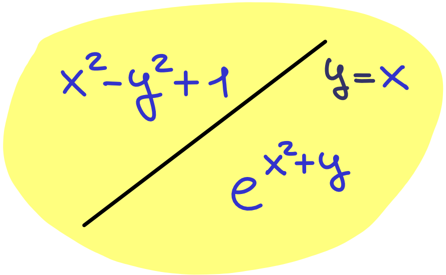
1.a $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(xy)}{y} & \text{se } y\neq 0\\ 0 & \text{se } y=0\end{cases}$$ è continua in $\mathbb{R}^2$

Basta verificare che $\forall x_0\in\mathbb{R}$,
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y)=f(x_0,0)=0.$$
Si noti che se $(x,y)\to(x_0,0)$ allora $xy\to 0$ e
$$1-\cos(xy)=\frac{1}{2}(xy)^2\cdot(1+o(1))$$
Quindi per $y\neq 0$,
$$f(x,y)=\frac{1-\cos(y)}{y}=\frac{1}{2}\,\frac{x^2y^{\cancel{2}}}{\cancel{y}}(1+o(1))\xrightarrow[y\to 0]{x\to x_0} 0.$$

1.b $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{y} & \text{se } y\neq 0\\ x^3 & \text{se } y=0\end{cases}$$ è continua in $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0):x\neq 0,\pm 1\}$

Basta verificare per quali $x_0\in\mathbb{R}$,
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y)=f(x_0,0)=x_0^3.$$
Per $(x,y)\to(x_0,0)$ si ha che $xy\to 0$
$$\operatorname{sen}(xy)=xy(1+o(1)).$$
Quindi per $y\neq 0$
$$f(x,y)=\frac{\operatorname{sen}(xy)}{y}=\frac{x\cancel{y}}{\cancel{y}}(1+o(1))\xrightarrow[y\to 0]{x\to x_0} x_0$$
e la continuità è verificata nei punti in cui $x_0^3=x_0$ ossia $x_0=0,1,-1.$

1.c $f(x,y)=\begin{cases} e^{x^2+y} & \text{se } y<x \\ x^2-y^2+1 & \text{se } y\geq x \end{cases}$ è continua in $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,x): x\neq 0,-1\}$



Dato che $(x,y)\to e^{x^2+y}$ e $(x,y)\to x^2-y^2+1$ sono continue in $\mathbb{R}^2$, la continuità di f è verificata in $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,x):x\in\mathbb{R}\}$ e nei punti lungo la retta $y=x$ tali che

$$e^{x^2+x}=\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+1 \iff x^2+x=0 \iff x=0,-1.$$

2.a $f(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ Piano tangente in $(1,1)$?

$$f(1,1)=\operatorname{arctg}(1)=\frac{\pi}{4}$$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{-y/x^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2},\frac{1/x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)\Rightarrow \nabla f(1,1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Piano tangente in $(1,1)$:

$$z=\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)+\left(\frac{1}{2}\right)(y-1)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}.$$

2.b $f(x,y)=\log(\underbrace{|x+y|}_{}+y^2)$ Piano tangente in $(-2,1)$?

$= -x-y$ in un intorno di $(-2,1)$

$$f(-2,1)=\log(|-1|+1)=\log(2)$$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{-1}{-x-y+y^2},\frac{-1+2y}{-x-y+y^2}\right)\Rightarrow \nabla f(-2,1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Piano tangente in $(-2,1)$:

$$z=\log(2)-\frac{1}{2}(x+2)+\frac{1}{2}(y-1)=\log(2)-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}.$$

$\boxed{3.a}$ $f(x,y)=(1+x+y^2)^3$ T_2 in $(0,0)$?

Ricordiamo che $x^\alpha y^\beta = o(x^2+y^2)$ se $\alpha+\beta>2$.
Allora

$$(1+(x+y^2))^3 = 1+3(x+y^2)+3(x+y^2)^2+(x+y^2)^3$$
$$= 1+3x+3x^2+3y^2+o(x^2+y^2)$$

e per l'unicità di T_2,

$$T_2(x,y)=1+3x+3x^2+3y^2.$$

$\nabla=(3,0)$
$H=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$\boxed{3.b}$ $f(x,y)=\dfrac{e^{xy}}{(1-x)(1-2y)}$ T_2 in $(0,0)$?

$$\frac{e^{xy}}{(1-x)(1-2y)} = (1+xy+o(x^2+y^2))\cdot(1+x+x^2+o(x^2+y^2))\cdot(1+2y+4y^2+o(x^2+y^2))$$
$$=(1+xy+o(x^2+y^2))\cdot(1+x+2y+x^2+2xy+4y^2+o(x^2+y^2))$$
$$=1+x+2y+x^2+3xy+4y^2+o(x^2+y^2).$$

Quindi

$$T_2(x,y)=1+x+2y+x^2+3xy+4y^2.$$

$\nabla=(1,2)$
$H=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

$\boxed{4.a}$ $f(x,y)=x^3-y^3-3x+12y+2$ Punti stazionari?

$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ $\nabla f(x,y)=(3x^2-3,-3y^2+12)=(0,0)$

$$\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix}(1,2),\ (1,-2) \\ (-1,2),\ (-1,-2)\end{matrix}}$$

Punti stazionari

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix}$$

Quindi

$(1,2): \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ SELLA

$(-1,2): \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ MASSIMO RELATIVO

$(1,-2): \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ MINIMO RELATIVO

$(-1,-2): \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ SELLA

Non ci sono max/min assoluti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0)=\lim_{x\to\pm\infty}(x^3-3x+2)=\pm\infty.$$

$\boxed{4.b}$ $f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2}$ Punti stazionari?

$D=\mathbb{R}^2$, $f\in C^2(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$, f non è derivabile in $(0,0)$

Per $(x,y)\neq(0,0)$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\overset{4}{\cancel{8}}x}{\cancel{2}\sqrt{4x^2+y^2}},\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{4x^2+y^2}}\right)=(0,0)$$

Non ci sono punti stazionari!

$(0,0)$ è un punto di minimo assoluto:

$$f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2}\geq 0=f(0,0)\quad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

$\boxed{4.e}$ $f(x,y)=(x^2-y-1)(1-x^2-y^2)$ Punti stazionari?

$$=2x^2-x^4-x^2y^2-y+yx^2+y^3-1+y^2$$

$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} f_x(x,y)=4x-4x^3-2xy^2+2xy=2x(2-2x^2-y^2+y)=0 \\ f_y(x,y)=-2x^2y-1+x^2+3y^2+2y=x^2(1-2y)+3y^2+2y-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 3y^2+2y-1=0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x^2=2-y^2+y \\ (2-y^2+y)(1-2y)+6y^2+4y-2=0 \end{cases}$$

$(3y-1)(y+1)=0$

$$\boxed{\begin{matrix}(0,\frac{1}{3}) \\ (0,-1)\end{matrix}}$$

$$\cancel{2}-y^2+y-\cancel{4y}+2y^3-2y^2+6y^2+\cancel{4y}-2=0$$

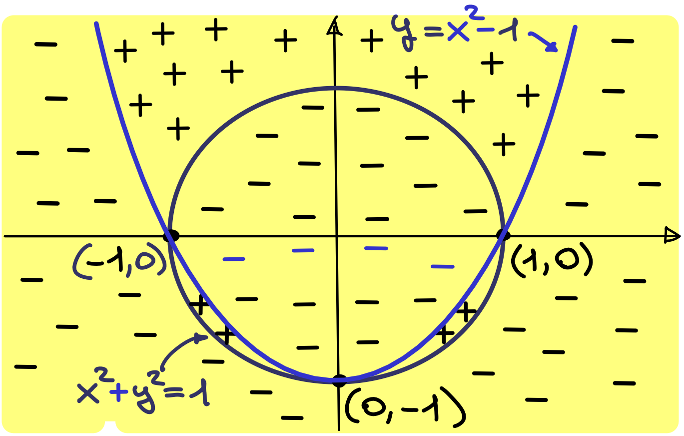
$$2y^3+3y^2+y=0$$

$$y(2y^2+3y+1)=0 \qquad y=0,-1,-\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 2x^2=2 \end{cases} \cup \begin{cases} y=1 \\ 2x^2=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=-\frac{1}{2} \\ 2x^2=\frac{5}{4} \end{cases}$$

$(1,0)$	$\cancel{(0,-1)}$	$\left(\sqrt{\frac{5}{8}},-\frac{1}{2}\right)$
$(-1,0)$	già presente	$\left(-\sqrt{\frac{5}{8}},-\frac{1}{2}\right)$

Esaminando il segno di f si trova che



i punti stazionari $(1,0)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$ dove la funzione vale 0 sono tutti punti di SELLA.

Per $(0,\frac{1}{3})$ e $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{8}},-\frac{1}{2}\right)$ calcoliamo la matrice hessiana

$$f_{xx}(x,y)=4-12x^2-2y^2+2y$$
$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-4xy+2x$$
$$f_{yy}(x,y)=-2x^2+6y+2$$

Così

$$H_f\left(0,\tfrac{1}{3}\right)=\begin{bmatrix} \frac{40}{9}^{\,+} & 0 \\ 0 & 4^{+} \end{bmatrix} \Rightarrow \left(0,\tfrac{1}{3}\right) \text{ MINIMO RELATIVO}$$

$$H_f\left(\pm\sqrt{\tfrac{5}{8}},-\tfrac{1}{2}\right)=\begin{bmatrix} -5 & \pm\sqrt{10} \\ \pm\sqrt{10} & -\frac{9}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \operatorname{tr}(H)<0,\ \det(H)=\frac{5}{4}>0 \\ \left(\pm\sqrt{\tfrac{5}{8}},-\tfrac{1}{2}\right) \text{ MASSIMO RELATIVO} \end{array}$$

$\boxed{5.a}$ $f(x,y)=(x-y)^4-8(x-y)^2$ Che tipo di punto è $(0,0)$?

$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f(x,y)=-8(x-y)^2+o(x^2+y^2)$

da cui $\quad = -8x^2+16xy-8y^2+o(x^2+y^2)$

$f(0,0)=0$, $\nabla f(0,0)=(0,0)$, $H_f(0,0)=16\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\det(H)=0$

Abbiamo che

$$f(x,y)=\underbrace{(x-y)^2}_{\geqslant 0}\big(\underbrace{(x-y)^2-8}_{\to -8 \text{ per } (x,y)\to(0,0)}\big)\leq 0=f(0,0) \text{ in un intorno di } (0,0)$$

quindi è <0 in un intorno di $(0,0)$

Quindi $(0,0)$ è un punto di MASSIMO RELATIVO

Segno di f