ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 10

DERIVATE SECONDE

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\vec{x}_0$ punto interno di D.
Se f è derivabile in un intorno di $\vec{x}_0$ allora possiamo chiederci se le derivate parziali di f sono a loro volta derivabili. Nel caso lo siano

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = (f_{x_i})_{x_j} = f_{x_i x_j} \quad \text{per } 1 \leq i,j \leq n.$$

si dice DERIVATA PARZIALE SECONDA di f rispetto a x_i e x_j.
Variando gli indici i e j si ottengono n^2 derivate parziali seconde che si possono raccogliere in una matrice $n \times n$ detta HESSIANA di f

$$H_f(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\vec{x}_0) & f_{x_1x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(\vec{x}_0) \\ f_{x_2x_1}(\vec{x}_0) & f_{x_2x_2}(\vec{x}_0) & & f_{x_2x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\vec{x}_0) & f_{x_nx_2}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(\vec{x}_0) \end{bmatrix}$$

In generale le derivate "miste" $f_{x_ix_j}$ e $f_{x_jx_i}$ sono diverse ossia è necessario tenere conto dell'ordine di derivazione.
Per il teorema seguente, se f è sufficientemente regolare allora vale l'uguaglianza e in tal caso la matrice H_f è simmetrica.

TEOREMA (SCHWARZ)
Sia A un insieme aperto $\subseteq \mathbb{R}^n$. Se $f \in C^2(A)$ ossia f è derivabile due volte e tutte le sue derivate parziali prime e seconde sono continue in A allora

$$\forall \vec{x}_0 \in A \quad f_{x_ix_j}(\vec{x}_0) = f_{x_jx_i}(\vec{x}_0) \quad \text{per } 1 \leq i,j \leq n.$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

- Sia $f(x,y)=x^2e^{3y}\in C^2(\mathbb{R}^2)$ allora le derivate parziali prime sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xe^{3y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x^2e^{3y}$$

mentre le derivate parziali seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2e^{3y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=6xe^{3y}$$

$$=$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=6xe^{3y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=9x^2e^{3y}$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE 2)

Sia $f:D\to\mathbb{R}$ con $D\subseteq\mathbb{R}^n$, sia $\vec{x}_0$ punto interno di D. Se f è C^2 in un intorno di $\vec{x}_0$ allora per $\vec{x}\to\vec{x}_0$

$$f(\vec{x})=T_{2,\vec{x}_0}(\vec{x})+o(\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^2)$$

dove

$$T_{2,\vec{x}_0}(\vec{x})=f(\vec{x}_0)+\langle\nabla f(\vec{x}_0),\vec{x}-\vec{x}_0\rangle+\frac{1}{2}\langle H_f(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0),\vec{x}-\vec{x}_0\rangle$$

è il POLINOMIO DI TAYLOR DI ORDINE 2 di f in $\vec{x}_0$.

dim. Sia $r>0$, $B_r(\vec{x}_0)\subseteq D$ e per $\vec{x}\neq\vec{x}_0$ sia $\vec{v}=\dfrac{\vec{x}-\vec{x}_0}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}$

$\|\vec{v}\|=1$

Consideriamo la funzione

$$(-r,r)\ni t\to\varphi(t)=f(\underbrace{\vec{x}_0+t\vec{v}}_{\in B_r(\vec{x}_0)}).$$

Per la formula di Taylor per funzioni in 1 variabile

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)\cdot t+\frac{1}{2}\varphi''(0)t^2+o(t^2) \quad (*)$$

Ora $\varphi(0)=f(\vec{x}_0)$. Inoltre

$$\varphi'(t)=\frac{d}{dt}(f(\vec{x}_0+t\vec{v}))=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0+t\vec{v})\cdot v_j$$

Così $\varphi'(0)=\langle\nabla f(\vec{x}_0),\vec{v}\rangle$.

Infine

$$\varphi''(t) = \frac{d}{dt}(\varphi'(t)) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0 + t\vec{v}) \cdot v_j\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0 + t\vec{v}) \cdot v_j\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0 + t\vec{v}) v_j \cdot v_i$$

Così $\varphi''(0) = \langle H_f(\vec{x}_0)\vec{v}, \vec{v} \rangle$.

Ponendo $t = \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \in (0, r)$ si ha $\vec{v} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{t}$ e sostituendo le espressioni trovate di $\varphi(0), \varphi'(0), \varphi''(0)$ in $(*)$ si ha

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle \nabla f(\vec{x}_0), \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{\cancel{t}} \rangle \cancel{t}$$
$$+ \frac{1}{2} \langle H_f(\vec{x}_0) \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{\cancel{t}}, \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{\cancel{t}} \rangle \cancel{t^2} + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2)$$

da cui la tesi. $\square$

OSSERVAZIONE

Il polinomio di Taylor $T_{2,\vec{x}_0}(\vec{x})$ è unico:

Se P è un polinomio di 2° grado tale che

$$f(\vec{x}) = P(\vec{x}) + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2) \quad \text{per } \vec{x} \to \vec{x}_0$$

allora $P(\vec{x}) = T_{2,\vec{x}_0}(\vec{x})$.

ESEMPI

- Sia $f(x,y) = \frac{y}{x}$ e $(x_0, y_0) = (1,2)$ allora

$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2}, \frac{1}{x}\right) \Rightarrow \nabla f(1,2) = (-2, 1) \text{ e}$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2y}{x^3} & -\frac{1}{x^2} \\ -\frac{1}{x^2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(1,2) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi il polinomio di Taylor di ordine 2 di $f(x,y)=\frac{y}{x}$ in $(1,2)$ è

$$T_2(x,y) = 2 + \langle(-2,1),(x-1,y-2)\rangle$$
$$+\frac{1}{2}\left\langle\begin{bmatrix}4 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y-2\end{pmatrix},(x-1,y-2)\right\rangle$$
$$= 2-2(x-1)+(y-2)+2(x-1)^2-(x-1)(y-2).$$

- Sia $f(x,y)=e^{xy}\cos(x)$ e $(x_0,y_0)=(0,0)$ allora

$$e^{xy}=1+xy+o(xy) \quad e \quad \cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

e quindi

$$e^{xy}\cos(x)=\left(1+xy+o(xy)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)$$
$$=1+xy-\frac{x^2}{2}-\underbrace{\frac{x^3y}{2}}_{= o(xy)}+o(xy)+o(x^2)$$

$o(xy)$ perché $\frac{x^3y}{xy}\to 0$ per $(x,y)\to(0,0)$

$$=1+xy-\frac{x^2}{2}+o(x^2+y^2) \Longrightarrow T_2(x,y)=1+xy-\frac{x^2}{2}$$

unicità

perché se $\alpha,\beta\geq 0$ e $\alpha+\beta\geq 2$ allora

$$\frac{o(x^\alpha y^\beta)}{x^2+y^2}=\underbrace{\left(\frac{o(x^\alpha y^\beta)}{x^\alpha y^\beta}\right)}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}}_{=\rho^{(\alpha+\beta-2)\geq 0}\cdot\cos^\alpha(\theta)\operatorname{sen}^\beta(\theta)}\to 0 \text{ per } (x,y)\to(0,0)$$

limitato

Con T_2 in $(0,0)$ possiamo ad esempio calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{xy}\cos(x)-1}{(x^2+y^2)^{2/3}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy-\frac{x^2}{2}+o(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{2/3}}=0.$$

PUNTI DI MASSIMO / MINIMO

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\overline{x_0} \in D$.

$\overline{x_0}$ si dice PUNTO DI MASSIMO (MINIMO) di f in D se

$$\forall \overline{x} \in D \quad f(\overline{x}) \underset{(\geq)}{\leq} f(\overline{x_0}).$$

$\overline{x_0}$ si dice PUNTO DI MASSIMO (MINIMO) RELATIVO se

$$\exists r>0 : \forall \overline{x} \in D \cap B_r(\overline{x_0}), \; f(\overline{x}) \underset{(\geq)}{\leq} f(\overline{x_0}).$$

TEOREMA (FERMAT per $n>1$)

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\overline{x_0}$ punto interno di D. Se f è differenziabile in $\overline{x_0}$ e $\overline{x_0}$ è un punto di max/min relativo allora $\nabla f(\overline{x_0}) = \overline{0}$ ossia $\overline{x_0}$ è un PUNTO STAZIONARIO di f. detto anche PUNTO CRITICO

dim. Vediamo il caso di $\overline{x_0}$ minimo relativo.
Dato che $\overline{x_0}$ è un punto interno di D

$$\exists r>0 : \forall x \in B_r(\overline{x_0}) \subseteq D, \; f(\overline{x}) \geq f(\overline{x_0}).$$

Sia $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\overrightarrow{v}\| = 1$ e consideriamo la funzione

$$(-r, r) \ni \varphi(t) \to f(\overline{x_0} + t\overrightarrow{v})$$

Tale funzione in una variabile ha un punto di minimo relativo in $t=0 \in (-r,r)$ e per il teorema di Fermat $\varphi'(0)=0$ da cui

$$0 = \varphi'(0) = \frac{d}{dt}\left(f(\overline{x_0} + t\overrightarrow{v})\right)\Big|_{t=0} = \langle \nabla f(\overline{x_0}), \overrightarrow{v} \rangle.$$

Scegliendo $\overrightarrow{v} = \overline{e_j}$ per $j=1, \dots, n$ si ha che

$$0 = \langle \nabla f(\overline{x_0}), \overline{e_j} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x_0})$$

e dunque $\nabla f(\overline{x_0}) = \overrightarrow{0}$. $\square$

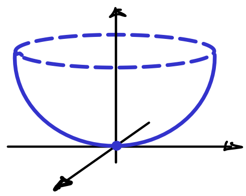
ESEMPI

- I punti stazionari di $f(x,y)=x^2+y^2$ sono:

$$\nabla f(x,y)=(2x,2y)\overset{?}{=}(0,0) \implies (x,y)=(0,0).$$

Dato che

$$f(x,y)=x^2+y^2\geq f(0,0)\geq 0$$

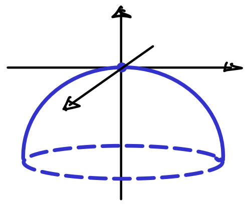


paraboloide ellittico

il punto stazionario $(0,0)$ è un punto di minimo assoluto.

Considerando $g(x,y)=-f(x,y)$ il punto stazionario rimane $(0,0)$ e questa volta il punto è di massimo assoluto:

$$g(x,y)=-x^2-y^2\leq g(0,0)=0$$

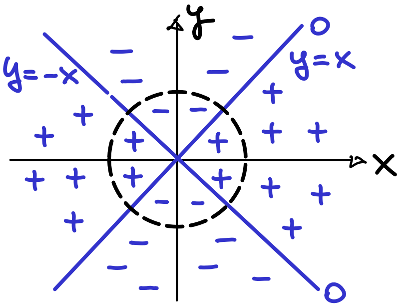


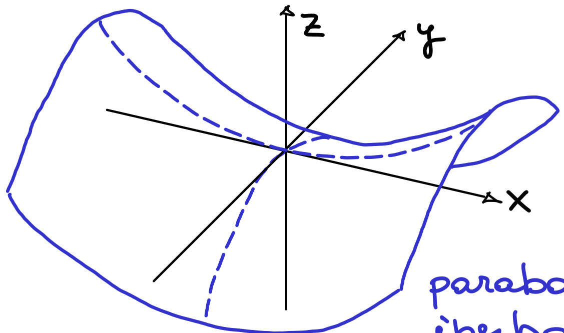
paraboloide ellittico

- I punti stazionari di $f(x,y)=x^2-y^2$ sono:

$$\nabla f(x,y)=(2x,-2y)\overset{?}{=}(0,0) \implies (x,y)=(0,0).$$

Notiamo che $f(0,0)=0$ e f è assume valori positivi e negativi in ogni intorno di $(0,0)$.
$(0,0)$ non è né un punto di massimo né di minimo





paraboloide iperbolico

Sia $\overline{x_0}$ un punto interno di D.
$\overline{x_0}$ si dice PUNTO DI SELLA se $\nabla f(\overline{x_0})=\vec{0}$ e
$\forall r>0\ \exists\ \overline{x_1},\overline{x_2}\in D\cap B_r(\overline{x_0}) : f(\overline{x_1})<f(\overline{x_0})$ e $f(\overline{x_2})>f(\overline{x_0})$.