ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 8

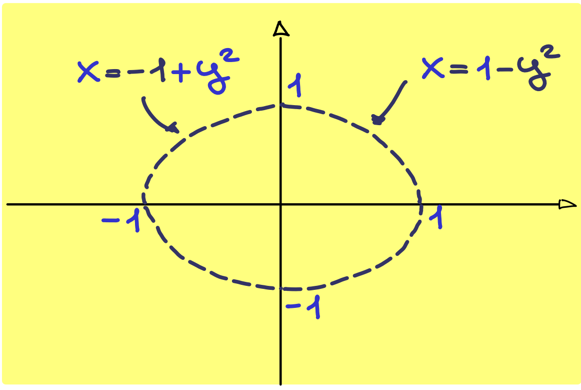
ALCUNI ESERCIZI DEL FOGLIO 2

1.a $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{|x|+y^2-1}$ Dominio D?

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+y^2-1 \neq 0\}$$

Notiamo che

$$|x|+y^2-1=0 \iff |x| = 1-\underbrace{y^2 \geq 0}_{|y|\leq 1} \iff \begin{cases} x = \pm(1-y^2) & \text{parabole} \\ \text{con } |y|\leq 1 & \text{striscia orizzontale} \end{cases}$$



1.b $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2-|x|-|y|}}$ Dominio D?

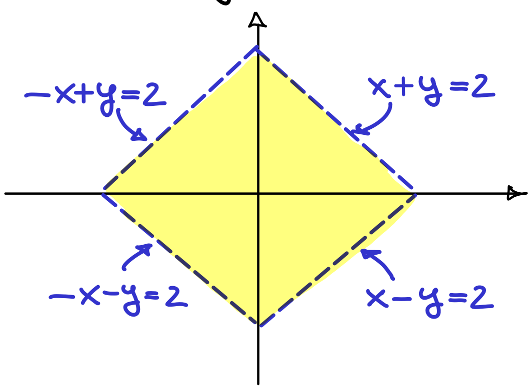
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| < 2\}$$

Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$ $|x|+|y|=2 \iff x+y=2$ retta

Se $x \geq 0$ e $y \leq 0$ $|x|+|y|=2 \iff x-y=2$ retta

Se $x \leq 0$ e $y \geq 0$ $|x|+|y|=2 \iff -x+y=2$ retta

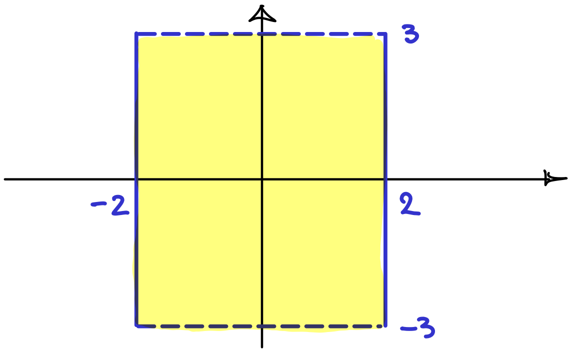
Se $x \leq 0$ e $y \leq 0$ $|x|+|y|=2 \iff -x-y=2$ retta



1.c

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{9-y^2}} \qquad \text{Dominio } D?$$

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\leq 2 \text{ e } |y|<3\}=[-2,2]\times(-3,3)$$

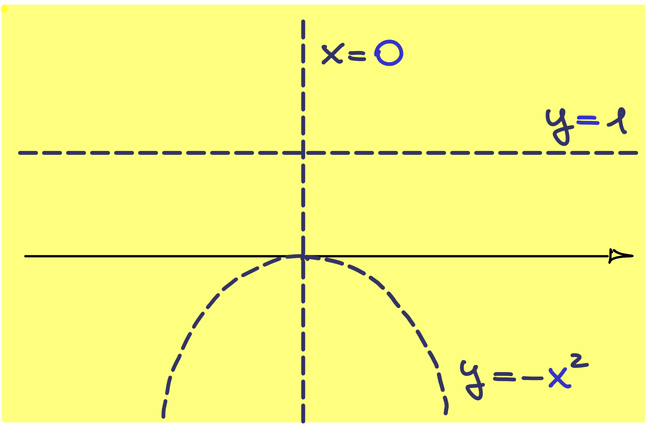


$x(x^2+y)$

1.d

$$f(x,y)=\frac{\log|x^3+xy|}{y-1} \qquad \text{Dominio } D?$$

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0 \text{ e } x^2+y\neq 0 \text{ e } y\neq 1\}$$



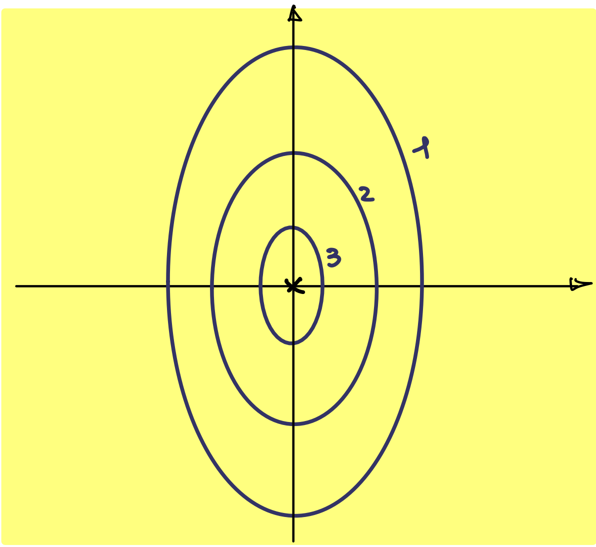
$\boxed{2.a}$

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2}}$$ Curve di livello?

Per $(x,y)\in D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2}}=k>0 \iff \frac{1}{k^2}=4x^2+y^2 \iff \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2k}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{k}\right)^2}=1$$

ellisse centrata in $(0,0)$ con semiassi $\frac{1}{2k}$ e $\frac{1}{k}$



Al crescere di k le ellissi diventano sempre più piccole

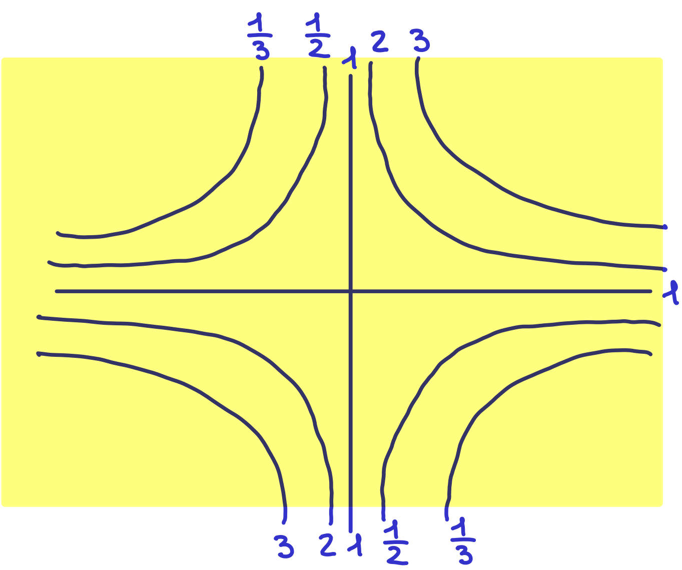
$\boxed{2.b}$

$$f(x,y)=e^{xy}$$ Curve di livello?

Per $(x,y)\in D=\mathbb{R}^2$

$$e^{xy}=k>0 \iff xy=\log(k) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ oppure } y=0 & \text{se } k=1 \\ y=\frac{\log(k)}{x} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

iperbole



Per $k=1$ c'è la coppia di rette $x=0$ e $y=0$

Le iperboli stanno nel 1° e 3° quadrante per $k>1$ e nel 2° e 4° quadrante per $0<k<1$.

$\boxed{3.a}$ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|} = 0$$

Nel dominio $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ se restringiamo f lungo le rette $x=0$ e $y=mx$ otteniamo sempre 0:

$$\underset{y\neq 0}{f(0,y)} = \frac{0}{|y|} = 0 \to 0 \quad e \quad f(x,mx) = \frac{m\cancel{x^2}^{|x|}}{\cancel{|x|}(1+|m|)} \to 0 .$$

Quindi se il limite esiste vale 0.

Passando alle coordinate polari $x=\rho\cos\theta$ $y=\rho\,\mathrm{sen}\theta$

$$|f(x,y)| = \frac{\rho^2 \overbrace{|\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta|}^{\leq 1}}{\rho(\underbrace{|\cos\theta|+|\mathrm{sen}\theta|}_{\geq m})} \leq \rho\cdot\frac{1}{m} \to 0 \text{ per } \rho\to 0$$

dove

$$m = \min_{\theta\in[0,2\pi]} \left(|\cos\theta|+|\mathrm{sen}\theta|\right) > 0$$

perché la funzione $\theta \to |\cos\theta|+|\mathrm{sen}\theta| > 0$ è continua nel compatto $[0,2\pi]$

In alternativa si può anche dire che per $(x,y)\to(0,0)$

$$0 \leq \frac{|xy|}{|x|+|y|} = |x|\cdot\underbrace{\left(\frac{|y|}{|x|+|y|}\right)}_{\leq 1} \leq |x| \to 0 .$$

$\boxed{3.b}$ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|(1+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \text{non esiste}$$

In $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, consideriamo le restrizioni lungo le rette passanti per $(0,0)$:

$$\underset{y\neq 0}{x=0}, \quad f(0,y) = \frac{0}{|y|} = 0 \to 0 \quad \text{per } (x,y)\to(0,0)$$

$$\underset{x\neq 0}{y=mx}, \quad f(x,mx) = \frac{\cancel{|x|}(1+mx)}{\cancel{|x|}\sqrt{1+m^2}} \to \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \neq 0$$

Dato che i due limiti sono diversi si conclude che il limite dato non esiste.

3.c

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\log(1+x^2+2y^2)}{3x^2+y^2}=0$$

In $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, per $(x,y)\to(0,0)$ si ha che

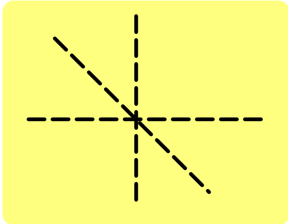
$$\frac{x\log(1+x^2+2y^2)}{3x^2+y^2}=\underbrace{\left(\frac{\log(1+x^2+2y^2)}{x^2+2y^2}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{x\cdot(x^2+2y^2)}{3x^2+y^2}\right)}_{\to 0}\longrightarrow 0$$

perché $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1$ e

$$\left|\frac{x\cdot(x^2+2y^2)}{3x^2+y^2}\right|=|x|\cdot\underbrace{\left(\frac{x^2}{3x^2+y^2}\right)}_{\leq 1}+2|x|\cdot\underbrace{\left(\frac{y^2}{3x^2+y^2}\right)}_{\leq 1}\leq 3|x|\longrightarrow 0$$

3.d

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{xy^2}\right)}{e^{x+y}-1}=0$$



In $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0 \text{ e } y\neq 0 \text{ e } x+y\neq 0\}$

per $(x,y)\to(0,0)$ si ha che

$$\frac{(x^2-y^2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{xy^2}\right)}{e^{x+y}-1}=\underbrace{\left(\frac{x+y}{e^{x+y}-1}\right)}_{\to 1}\cdot\frac{\cancel{(x+y)}\overbrace{(x-y)}^{\to 0}}{\cancel{x+y}}\cdot\underbrace{\left(\mathrm{sen}\left(\frac{1}{xy^2}\right)\right)}_{|\cdot|\leq 1}\longrightarrow 0$$

perché $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$

3.g

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^4+y^2-2x+3y}{2+\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty$$

Notiamo che

$$x^4\geq x^2-1\ ,\quad \pm x\leq|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}\quad \text{e}\quad \pm y\leq|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$$

e quindi

$$x^4+y^2-2x+3y\geq x^2-1+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}-3\sqrt{x^2+y^2}$$

Infine per $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\longrightarrow+\infty$,

$$\frac{x^4+y^2-2x+3y}{2+\sqrt{x^2+y^2}}\geq\frac{\rho^2-5\rho-1}{2+\rho}\longrightarrow+\infty.$$