

ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 7

TEOREMA (WEIERSTRASS)

Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è COMPATTO (chiuso e limitato) e f è continua in A allora f ha almeno un punto di massimo $\vec{x}_{\max} \in A$ e ha almeno un punto di minimo $\vec{x}_{\min} \in A$ ossia

$$\forall \vec{x} \in A, \quad f(\vec{x}_{\min}) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_{\max}).$$

dim. Esistenza di \vec{x}_{\max} (simile per \vec{x}_{\min}).

Sia $M = \sup_{\vec{x} \in A} f(\vec{x}) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Allora per le proprietà del $\sup \exists \{\vec{x}_k\}$ successione in A tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = M \quad (*).$$

Dato che A è limitato, $\{\vec{x}_k\}$ è limitata e per BW ammette una sottosuccessione convergente

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \vec{x}_{k_j} = \vec{x}_{\max}$$

Il punto $\vec{x}_{\max} \in A$ perché A è chiuso.

Allora per la continuità di f in \vec{x}_{\max} ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(\vec{x}_{k_j}) = f(\vec{x}_{\max})$$

e dunque per (*) $f(\vec{x}_{\max}) = M$ (e $M \in \mathbb{R}$).

Infine, dato che $M = \sup_{\vec{x} \in A} f(\vec{x})$,

$$\forall \vec{x} \in A, \quad f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_{\max}) = M.$$

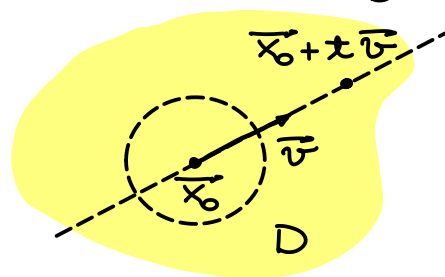
□

DERIVABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^m$, sia \bar{x}_0 un punto interno di D e sia $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ con $\|\vec{v}\|=1$.

La DERIVATA DIREZIONALE di f rispetto a \vec{v} in \bar{x}_0 è

$$(D_{\vec{v}} f)(\bar{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\vec{v}) - f(\bar{x}_0)}{t}$$



Nel caso in cui $\vec{v} = \vec{e}_j$ (elemento della base canonica) la corrispondente derivata direzionale si dice DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO ALLA VARIABILE x_j in \bar{x}_0

$$D_{\vec{e}_j} f(\bar{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0) = f_{x_j}(\bar{x}_0)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\vec{e}_j) - f(\bar{x}_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((\bar{x}_0)_1, (\bar{x}_0)_2, \dots, (\bar{x}_0)_j + t, \dots, (\bar{x}_0)_m) - f(\bar{x}_0)}{t}$$

cambia solo la j-esima coordinata

Se in \bar{x}_0 esistono le derivate parziali di f rispetto a tutte le n variabili allora f si dice DERIVABILE in \bar{x}_0 e il vettore le cui componenti sono le n derivate parziali si dice GRADIENTE di f in \bar{x}_0

$$\nabla f(\bar{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\bar{x}_0) \right) \in \mathbb{R}^m$$

OSSERVAZIONE

In precedenza abbiamo notato che

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

e quindi la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

non è continua in $(0,0)$. D'altra parte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

Ossia f è derivabile in $(0,0)$ con $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Quindi per $n > 1$, derivabilità $\not\Rightarrow$ continuità.

OSSERVAZIONE

$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ si calcola con le "solite" regole di derivazione considerando costanti le variabili x_k per $k \neq j$.

ESEMPI

- $f(x,y) = x^2 e^{x+2y}$, $P_0 = (2, -1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x e^{x+2y} + x^2 e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 e^{x+2y} \cdot 2$$

$$\nabla f(2, -1) = (4+4, 4 \cdot 2) = (8, 8).$$

$$\bullet f(x, y, z) = \frac{\log(x^2 + y)}{2z + \sqrt{y}}, \quad P_0 = (1, 1, 0)$$

punto interno di D : $\begin{cases} x^2 + y > 0 \\ 2z + \sqrt{y} \neq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{2z + \sqrt{y}} \cdot \frac{2x}{x^2 + y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y} \cdot \frac{1}{2z + \sqrt{y}} + \log(x^2 + y) \cdot \left(-\frac{1}{(2z + \sqrt{y})^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{\log(x^2 + y)}{(2z + \sqrt{y})^2} \cdot 2$$

$$\nabla f(1, 1, 0) = \left(1, \frac{1 - \log(2)}{2}, -2 \log(2)\right)$$

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sia \bar{x}_0 punto interno di D .

Si dice che f è DIFFERENZIABILE in \bar{x}_0 se $\exists \bar{a} \in \mathbb{R}^n$

tale che per $\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0$

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) + \langle \bar{a}, \bar{x} - \bar{x}_0 \rangle + o(\|\bar{x} - \bar{x}_0\|).$$

TEOREMA

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sia \bar{x}_0 punto interno di D .

Se f è differenziabile in \bar{x}_0 allora

1) f è continua in \bar{x}_0 ;

2) f è derivabile in \bar{x}_0 e $\bar{a} = \nabla f(\bar{x}_0)$;

3) Esistono le derivate in \bar{x}_0 in ogni direzione e

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{v}\| = 1, \quad D_{\vec{v}} f(\bar{x}_0) = \langle \nabla f(\bar{x}_0), \vec{v} \rangle.$$

dim.

1) Per $\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0$,

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) + \langle \bar{a}, \bar{x} - \bar{x}_0 \rangle + o(\|\bar{x} - \bar{x}_0\|) \rightarrow f(\bar{x}_0).$$

$$|\langle \bar{a}, \bar{x} - \bar{x}_0 \rangle| \stackrel{CS}{\leq} \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \rightarrow 0$$

2) Sia $1 \leq j \leq n$ allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\bar{e}_j) - f(\bar{x}_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \bar{a}, t\bar{e}_j \rangle + o(\|t\bar{e}_j\|)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t(\bar{a})_j}{t} + \frac{o(|t|)}{t} \right) = (\bar{a})_j. \end{aligned}$$

Quindi esistono le derivate parziali e $\nabla f(\bar{x}_0) = \bar{a}$.

$$\begin{aligned} 3) D_{\vec{v}} f(\bar{x}_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\vec{v}) - f(\bar{x}_0)}{t} \\ &\stackrel{2)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \nabla f(\bar{x}_0), t\vec{v} \rangle + o(\|t\vec{v}\|)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t \langle \nabla f(\bar{x}_0), \vec{v} \rangle}{t} + \frac{o(|t|)}{t} \right) \\ &= \langle \nabla f(\bar{x}_0), \vec{v} \rangle. \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE

Se f è differenziabile in \bar{x}_0 , per $\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0$

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) + \langle \nabla f(\bar{x}_0), \bar{x} - \bar{x}_0 \rangle + o(\|\bar{x} - \bar{x}_0\|)$$

ovvia la funzione $\bar{x} \rightarrow f(\bar{x}_0) + \langle \nabla f(\bar{x}_0), \bar{x} - \bar{x}_0 \rangle$ rappresenta la "migliore" approssimazione lineare di f in un intorno di \bar{x}_0 .

Per analogia al caso $n=1$ dove

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

e

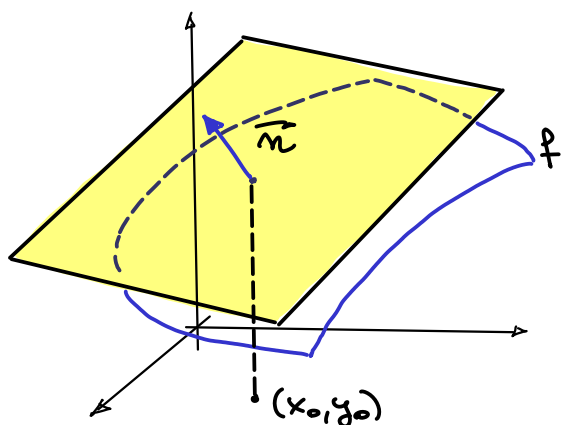
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

è l'equazione della retta tangente al grafico

di f nel punto $(x_0, f(x_0))$, per $m=2$,

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x-x_0)\vec{e}_1 + (y-y_0)\vec{e}_2 \rangle \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0) \end{aligned}$$

è l'equazione del PIANO TANGENTE al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



Se $z_0 = f(x_0, y_0)$ allora si ha

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) + 1 \cdot (z-z_0) = 0$$

ossia

$$\langle \vec{n}, (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \rangle = 0$$

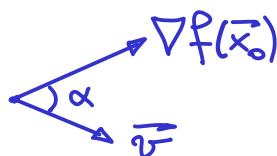
dove $\vec{n} = (-\nabla f(x_0, y_0), 1)$ è

ortogonale al piano tangente. Si noti che il piano tangente è orizzontale se $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$.

OSSERVAZIONE

La derivata direzionale $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0)$ è una misura di come varia f "vicino" a \vec{x}_0 lungo la direzione \vec{v} . Quindi se f è differenziabile in \vec{x}_0 e $\nabla f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ allora la relazione

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{v} \rangle = \|\nabla f(\vec{x}_0)\| \cdot \cos(\alpha)$$



dice che tale variazione è massima per $\alpha=0$ ossia quando \vec{v} punta nella stessa direzione di $\nabla f(\vec{x}_0)$.