ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 6

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \overset{0/0}{=} 0$$

(0,0) punto di accumulazione di $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Notiamo che

$$0 \le (|x|-|y|)^2 = x^2+y^2-2|xy| \implies 0 \le \frac{|xy|}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}$$

Quindi se $(x,y)\to(0,0)$ allora

$$0 \le \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = |x|\cdot\frac{|xy|}{x^2+y^2} \le \frac{|x|}{2} \to 0$$

e anche il limite dato vale 0 per confronto.

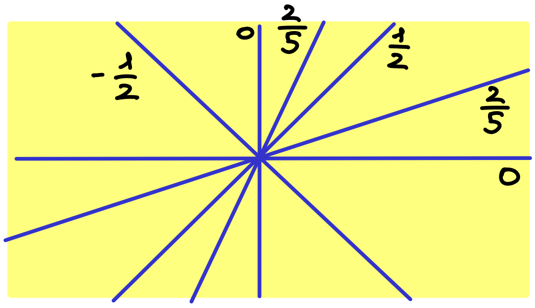
- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \overset{0/0}{=} \text{non esiste}$$

Per quanto detto $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ è limitata in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Restringendo f lungo le rette per (0,0) ossia $x=0$ e $y=mx$ con $m\in\mathbb{R}$ osserviamo che f è costante con un valore che dipende dalla retta:

$$x=0 \implies f(0,y)=0$$

$$y=mx \implies f(x,mx)=\frac{x\cdot mx}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

m	-1	0	2	$1/2$	1
f	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$



Quindi se $(x_k,y_k)=\left(0,\frac{1}{k}\right)\xrightarrow{k\to\infty}(0,0)$ allora

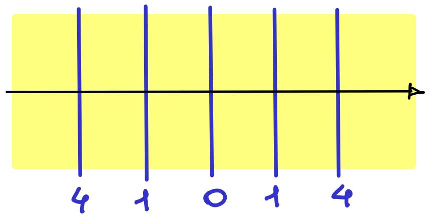
$$f(x_k,y_k)=0\to 0$$

mentre se $(x_k,y_k)=\left(\frac{1}{k},\frac{m}{k}\right)\xrightarrow{k\to\infty}(0,0)$ allora

$$f(x_k,y_k)=\frac{m}{1+m^2}\to\frac{m}{1+m^2} \quad (\neq 0 \text{ se } m\neq 0)$$

Dunque abbiamo almeno due successioni (x_k,y_k) che tendono a (0,0), lungo le quali f tende a limiti diversi. Per il teorema "ponte" il limite dato non esiste.

- $\lim_{(x,y)\to\infty} x^2 =$ non esiste



Consideriamo il comportamento di $f(x,y)=x^2$ lungo due successioni:

1) $(x_k,y_k)=(k,0)$ allora

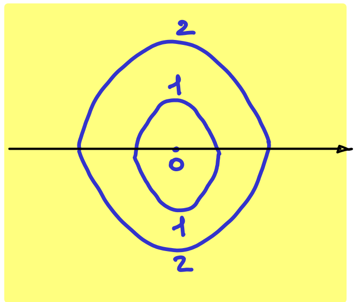
$\|(x_k,y_k)\| = k \to +\infty$ e $f(x_k,y_k)=k^2 \to +\infty$

↑ DIVERSI! il limite non esiste

2) $(x_k,y_k)=(0,k)$ allora

$\|(x_k,y_k)\| = k \to +\infty$ e $f(x_k,y_k)=0 \to 0$

- $\lim_{(x,y)\to\infty} x^2+|y| = +\infty$



$x^2+|y|=k \geq 0$

$y=\pm(k-x^2)$

coppie di parabole

$x^2+1 \geq 2|x| \geq |x|$

Abbiamo che $x^2 \geq |x|-1$

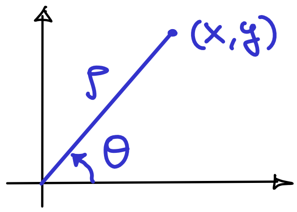
e dunque

dis. triang.

$$x^2+|y| \geq |x|+|y|-1 \geq \sqrt{x^2+y^2}-1 = \|(x,y)\|-1 \to +\infty$$

e per confronto anche il limite dato tende a $+\infty$.

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+|y|}-1}{(x^2+y^2)^{1/3}} \overset{\frac{0}{0}}{=} 0$



COORDINATE POLARI

$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

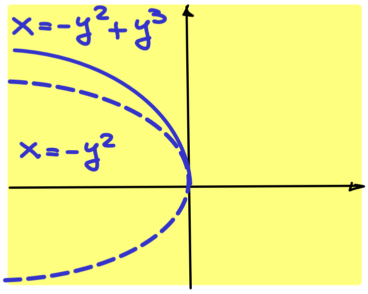
Abbiamo che

$$\frac{e^{x^2+|y|}-1}{(x^2+y^2)^{1/3}} = \underbrace{\left(\frac{e^{\overbrace{x^2+|y|}^{\to 0}}-1}{x^2+|y|}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(\frac{x^2+|y|}{(x^2+y^2)^{1/3}}\right)}_{\to 0} \to 0 \quad \text{per } (x,y)\to(0,0)$$

$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$

perché $(x,y)\to(0,0) \Rightarrow \rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ e

$$0 \leq \frac{x^2+|y|}{(x^2+y^2)^{1/3}} = \frac{\rho^2\overbrace{\cos^2\theta}^{\leq 1}+\rho\overbrace{|\mathrm{sen}\,\theta|}^{\leq 1}}{\rho^{2/3}} \leq \underbrace{\rho^{4/3}+\rho^{1/3}}_{\text{indipendente da }\theta} \to 0$$



• $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(\sqrt{|xy|})}{x+y^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \text{non esiste}$$

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{x=-y^2\}$

Dato che

$$1-\cos(\sqrt{|xy|}) = \frac{1}{2}|xy|(1+o(1)) \qquad \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{t^2}=\frac{1}{2}$$

basta considerare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{x+y^2}$$

Notiamo che $\frac{|xy|}{x+y^2}=0$ per $y=0$ e $x\neq 0$ e quindi se il limite esiste deve valere 0. Inoltre

$$0 \le \frac{|xy|}{|x+y^2|} \overset{CP}{=} \frac{\rho^2|\cos\theta\cdot\sin\theta|}{|\rho\cos\theta+\rho^2\sin^2\theta|} = \underset{\to 0}{\rho}\,\frac{\overbrace{|\cos\theta\cdot\sin\theta|}^{\le 1}}{\underbrace{|\cos\theta+\rho\sin^2\theta|}_{\text{"vicino" a } 0 \text{ se } \theta\sim\pm\frac{\pi}{2}\,!!}}$$

Proviamo allora a considerare la funzione ristretta ad una curva che abbia retta tangente verticale ($\theta=\frac{\pi}{2}$) in $(0,0)$: $x=-y^2+y^\alpha$ con $\alpha>2$.

Allora se $y\to 0^+$, $(x,y)=(-y+y^\alpha, y)\to(0,0)$ e

$$\frac{|xy|}{x+y^2} = \frac{|-y^3+y^{\alpha+1}|}{\cancel{-y^2}+y^\alpha+\cancel{y^2}} \sim y^{3-\alpha} \begin{cases} \to 0 & \text{se } 2<\alpha<3 \\ \to 1 & \text{se } \alpha=3 \\ \to +\infty & \text{se } \alpha>3 \end{cases}$$

limite $\neq 0$ (per $\alpha=3$ e $\alpha>3$)

Quindi visto che per $\alpha\geq 3$ otteniamo un limite diverso da 0, il limite dato non esiste.

• $$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{y\,\mathrm{tg}(x+y)}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{y\,\mathrm{tg}(\overset{\to 0}{x+y})}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}} = \frac{\overset{\to -1}{y}(x+y)(1+o(1))}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{\overbrace{(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2})}^{\to 2\sqrt{2}}}{(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2})}$$

$$= -2\sqrt{2}\,\frac{\cancelto{1}{(x+y)}}{\cancel{x^2-y^2}\ (x-y)}(1+o(1)) \longrightarrow -\sqrt{2}.$$

CONTINUITÀ

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\vec{x}_0 \in D$.
La funzione f si dice CONTINUA in $\vec{x}_0$ se $\vec{x}_0$ è un punto isolato di D oppure se $\vec{x}_0$ è un punto di accumulazione di D e

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0).$$

f è continua in $A \subseteq D$ e si scrive $f \in C(A)$ se f è continua in ogni $x_0 \in A$.

OSSERVAZIONE

Valgono le proprietà generali viste per $n=1$. In particolare somma, prodotto e composizione di funzioni continue sono continue.

ESEMPIO Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot \operatorname{sen}(y)}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $(0,0)$.

Dobbiamo verificare che $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$.

$$0 \leqslant \frac{|x \operatorname{sen}(y)|}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^\alpha}(1+o(1))$$

$$\overset{CP}{=} \rho^{2-2\alpha} \underbrace{|\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta|}_{\leq 1} (1+o(1))$$

Così se $2-2\alpha > 0$ ossia $\alpha < 1$ il limite è 0.

Se $\alpha = 1$ per $y = x$ il limite è $\dfrac{x \operatorname{sen}(x)}{2x^2} \to \dfrac{1}{2} \neq 0$.

Se $\alpha > 1$ per $y = x$ il limite è $\left|\dfrac{x \operatorname{sen}(x)}{2x^{2\alpha}}\right| \to +\infty \neq 0$.

Quindi f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 1$.