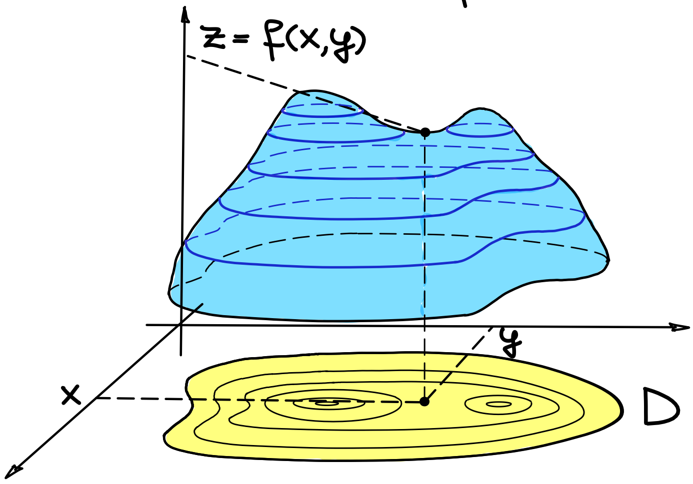
ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 5

INTRODUZIONE ALLE FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

Sia $n>1$ e sia f una funzione definita in un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a valori reali $f: D \to \mathbb{R}$:

$$D \ni \vec{x} \xrightarrow{f} f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$$

ossia una funzione f che ad ogni $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ in D associa il valore $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$.



Rappresentazione grafica per $n=2$ con $(x_1, x_2) = (x, y)$

Qui siamo interessati a determinare

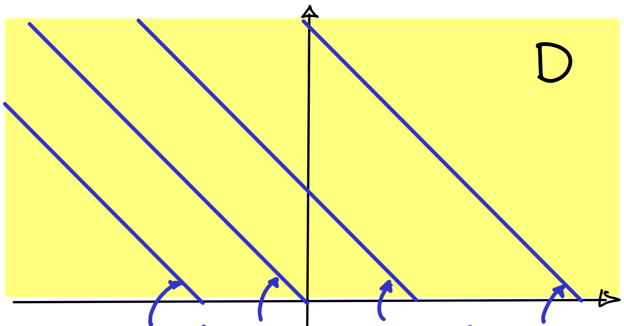
$$\sup\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in D\} \quad e \quad \inf\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in D\}$$

e gli eventuali punti di massimo e minimo in D.

ESEMPI

- $f(x,y) = x+y$ con $D = \{(x,y) : y \geq 0\}$ semipiano in $\mathbb{R}^2$

$z = x+y$ piano in $\mathbb{R}^3$



$$\sup_{(x,y)\in D} f(x,y) = +\infty$$

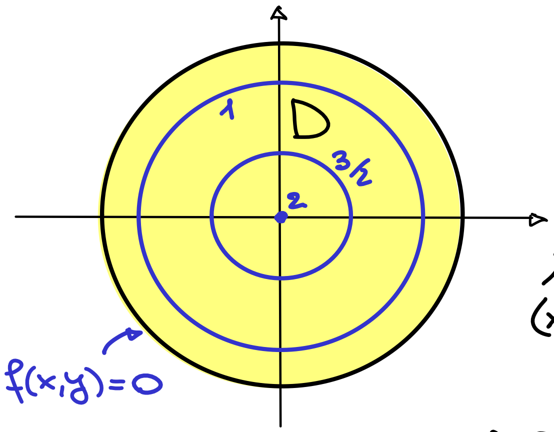
$$\inf_{(x,y)\in D} f(x,y) = -\infty$$

Non ci sono in D punti di max o min

CURVE DI LIVELLO

$$\{(x,y) \in D : f(x,y) = \text{costante}\}$$

- $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ con $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 4\}$



Curva di livello $f(x,y)=k$

$0\leq x^2+y^2=4-k^2 \Rightarrow k\leq 2$

Allora si ha che

$\sup_{(x,y)\in D} f(x,y)=2$ $(0,0)$ è l'unico punto di max

$\inf_{(x,y)\in D} f(x,y)=0$ Tutti i punti della circonferenza $x^2+y^2=4$ sono di min

PROPRIETÀ DI $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale

Ogni elemento di $\mathbb{R}^n$ è un VETTORE

$$\vec{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j$$

dove $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono le COORDINATE di $\vec{x}$ rispetto alla BASE CANONICA $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ con

$$\vec{e}_j = (0,0,\dots,0,\underset{\text{j-esima coordinata}}{1},0,\dots,0)$$

In $\mathbb{R}^n$ sono definite le seguenti operazioni:

SOMMA: $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$ $\forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$

PRODOTTO PER UNO SCALARE: $\alpha\cdot\vec{x}=(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$ $\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$ $\forall \underset{\text{scalare}}{\alpha}\in\mathbb{R}$

PRODOTTO SCALARE:

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+\dots+x_n\cdot y_n=\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \in \mathbb{R}^n$$

che è simmetrico: $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\langle\vec{y},\vec{x}\rangle$

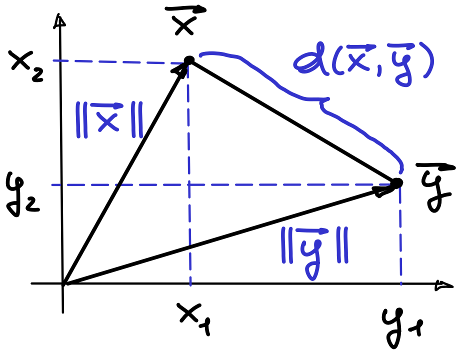
e bilineare: $\langle\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\vec{z}\rangle=\alpha\langle\vec{x},\vec{z}\rangle+\beta\langle\vec{y},\vec{z}\rangle$

$\langle\vec{z},\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\rangle=\alpha\langle\vec{z},\vec{x}\rangle+\beta\langle\vec{z},\vec{y}\rangle$

- $\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico con una DISTANZA $d(\vec{x},\vec{y})$ indotta dalla NORMA $\|\vec{x}\|$ dove

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x},\vec{x}\rangle} = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$$

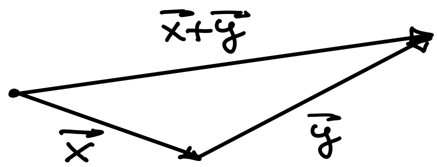
$$d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\| = \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j-y_j)^2\right)^{1/2}$$



- Valgono le seguenti disuguaglianze:

DISUGUAGLIANZE TRIANGOLARI

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$



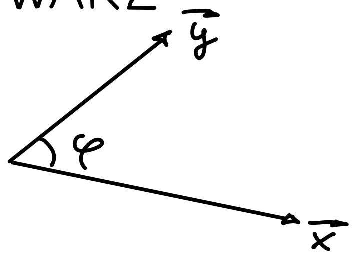
$$d(\vec{x},\vec{y}) \le d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{z},\vec{y})$$

$$\|\vec{x}-\vec{y}\| = \|(\vec{x}-\vec{z})+(\vec{z}-\vec{y})\| \le \|\vec{x}-\vec{z}\| + \|\vec{z}-\vec{y}\|$$

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ

$$|\langle \vec{x},\vec{y}\rangle| \le \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\overbrace{\cos(\varphi)}^{|\cdot|\le 1}$$



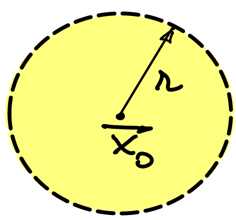
$\vec{x} \perp \vec{y}$ se e solo se $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = 0$.

ortogonali

TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}^n$

Sia $r>0$ e $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Indichiamo con

$$B_r(\vec{x}_0) = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : \|\vec{x}-\vec{x}_0\| < r\}$$



l' INTORNO SFERICO di centro $\vec{x}_0$ e raggio r.

$E\subseteq\mathbb{R}^n$ si dice LIMITATO se $\exists\, r>0$ tale che $E\subseteq B_r(\vec{0})$.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora

1) $\vec{x}$ si dice PUNTO INTERNO ad E se

$$\exists r>0 : B_r(\vec{x}) \subseteq E$$

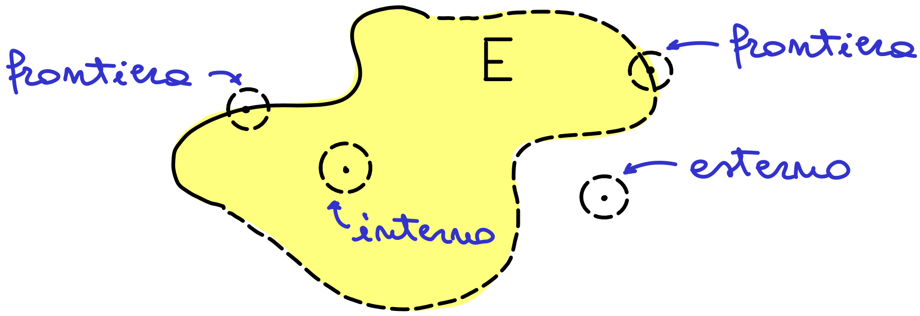
2) $\vec{x}$ si dice PUNTO ESTERNO ad E se

$$\exists r>0 : B_r(\vec{x}) \subseteq E^c \quad (\vec{x} \text{ è interno a } E^c)$$

3) $\vec{x}$ si dice PUNTO DI FRONTIERA di E se

$$\forall r>0 \quad B_r(\vec{x}) \cap E \neq \emptyset \ \text{ e } \ B_r(\vec{x}) \cap E^c \neq \emptyset$$

($\vec{x}$ non è né interno né esterno ad E)



L'insieme dei punti di frontiera di E si dice BORDO di E e si indica con ∂E. Si noti che $\partial(E^c) = \partial E$. $\bar{E} = E \cup \partial E$ indica la CHIUSURA di E.
E si dice APERTO se i suoi elementi sono tutti punti interni.
E si dice CHIUSO se E^c è aperto ossia se $E = \bar{E}$.

4) $\vec{x}$ si dice PUNTO DI ACCUMULAZIONE di E se

$$\forall r>0 \quad (B_r(\vec{x}) \underset{\text{meno}}{\setminus} \{\vec{x}\}) \cap E \neq \emptyset.$$

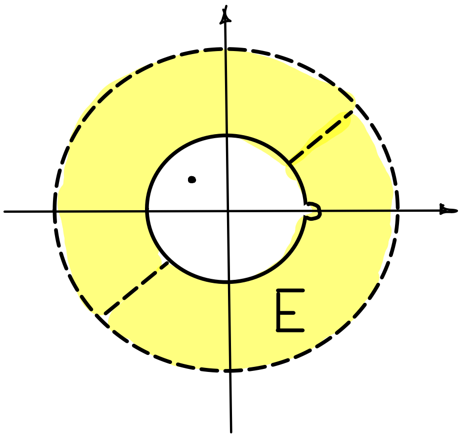
5) $\vec{x}$ si dice PUNTO ISOLATO di E se $\vec{x} \in E$ e

$$\exists r>0 : (B_r(\vec{x}) \setminus \{\vec{x}\}) \cap E = \emptyset.$$

OSSERVAZIONE I punti di accumulazione di E sono i punti di $\bar{E}$ meno i punti isolati di E.

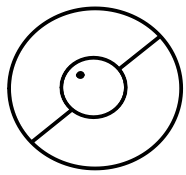
ESEMPIO

- $E=\{(x,y) : 1\leq x^2+y^2<4 \text{ e } y\neq x\}\setminus\{(1,0)\}\cup\{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$



Punti interni di E:

$\{(x,y): 1<x^2+y^2<4 \text{ e } y\neq x\}$

$\partial E =$ 

$\overline{E}=\{(x,y): 1\leq x^2+y^2\leq 4\}\cup\{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$

Punti di accumulazione di E: $\{(x,y): 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$.

Si dice che una succ. $\{\vec{x}_k\}$ in $\mathbb{R}^n$ tende a $\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ e si scrive $\lim_{k\to\infty}\vec{x}_k=\vec{y}$ se

$\vec{x}_k\in B_\varepsilon(\vec{y})$

$\forall \varepsilon>0\ \exists k_0>0$ tale che $\forall k\geq k_0$, $\|\vec{x}_k-\vec{y}\|<\varepsilon$.

OSSERVAZIONE Dato che per $j=1,\dots,n$

disug. triangolare

$$|(\vec{x}_k-\vec{y})_j|\leq\|\vec{x}_k-\vec{y}\|\leq\sum_{j=1}^{n}|(\vec{x}_k-\vec{y})_j|$$

si ha che

$$\vec{x}_k\to\vec{y}\iff(\vec{x}_k)_j\to(\vec{y})_j \text{ per } j=1,\dots,n.$$

TEOREMA (BOLZANO-WEIERSTRASS)

Ogni successione in $\mathbb{R}^n$ che sia limitata ammette una sottosuccessione convergente.

LIMITI DI FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\vec{x}_0$ un punto di accumulazione di D. Si dice che

1) $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L \in \mathbb{R}$

$\vec{x} \in B_\delta(\vec{x}_0) \setminus \{\vec{x}_0\}$

se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta, \; \vec{x} \in D \Rightarrow |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$

2) $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = +\infty \; (-\infty)$

se $\forall M > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta, \; \vec{x} \in D \Rightarrow f(\vec{x}) > M$
$(f(\vec{x}) < -M)$

Se D non è limitato allora

3) $\lim_{\vec{x} \to \infty} f(\vec{x}) = L \in \mathbb{R}$ ← senza segno

se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists R > 0 : \|\vec{x}\| > R, \; \vec{x} \in D \Rightarrow |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$

4) $\lim_{\vec{x} \to \infty} f(\vec{x}) = +\infty \; (-\infty)$

se $\forall M > 0 \; \exists R > 0 : \|\vec{x}\| > R, \; \vec{x} \in D \Rightarrow f(\vec{x}) > M$
$(f(\vec{x}) < -M)$

OSSERVAZIONE

Vale il teorema "ponte":

$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L \iff \forall$ succ. $\{\vec{x}_k\} \subset D \setminus \{\vec{x}_0\} : \vec{x}_k \to \vec{x}_0$ si ha che $f(\vec{x}_k) \to L$.