ANALISI MATEMATICA 2 - LEZIONE 4

ALCUNI ESERCIZI DEL FOGLIO 1

1.a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\underbrace{1+\frac{1}{k}}_{\to 0^+}}}$ DIVERGE A $+\infty$

$$\frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}} = \frac{1}{k\underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\to 1}} \sim \frac{1}{k}$$

Per il confronto asintotico dato che $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty$ anche la serie data diverge.

1.b $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathrm{sen}(\cos(k))\right)^k$ CONVERGE

Dato che $|\mathrm{sen}(\cos(k))| \leq \mathrm{sen}(1) < 1$ ($|\cos(k)| \leq 1$), per confronto con la serie geometrica $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(\mathrm{sen}(1))^k$ che è convergente, la serie data è assolutamente convergente e quindi anche convergente.

1.c $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \cos(\pi k)\,\mathrm{arctg}(e^{-k})$ CONVERGE

Abbiamo che $\cos(\pi k) = (-1)^k$ e $\mathrm{arctg}(e^{-k})$ decresce a 0 (si noti che $\mathrm{arctg}(x)$ è crescente e e^{-x} è decrescente) e dunque la serie converge per Leibniz.

1.d $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\log(k^2+1)}$ DIVERGE A $+\infty$

$$\frac{1}{k\log(k^2+1)} \sim \frac{1}{k\log(k^2)} = \frac{1}{2k\log(k)}$$

Dato che $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\log(k)} = +\infty$ ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$) per confronto asintotico anche la serie data diverge a $+\infty$.

$\boxed{1.e}$ $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(k))^{\log(k)}}$ CONVERGE

Notiamo che

$a^b = \exp(b\log(a))$

$$(\log(k))^{\log(k)} = \exp(\log(k)\cdot \underbrace{\log(\log(k))}_{\to +\infty})$$

mentre $k^\alpha = \exp(\alpha \log(k))$. Quindi

numero fissato

$$\frac{a_k}{1/k^2} = \frac{k^2}{\log(k)^{\log(k)}} = \exp(2\log(k) - \log(k)\log(\log(k))) \to 0.$$

$$= \log(k)(2 - \log(\log(k))) \to -\infty$$

Così per il confronto asintotico, dato che $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ converge, anche la serie data converge.

$\boxed{1.g}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^k e^{-k^2}$ CONVERGE

Si ha che $\sqrt[k]{a_k} = k\cdot e^{-k^{\cancel{2}}/\cancel{k}} = \dfrac{k}{e^k} \to 0 < 1$ e quindi la serie converge per il criterio della radice.

$\boxed{1.i}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k^3+1} - \sqrt{k^3-1}\right)$ CONVERGE

$$a_k = \left(\sqrt{k^3+1} - \sqrt{k^3-1}\right)\cdot \frac{\sqrt{k^3+1}+\sqrt{k^3-1}}{\sqrt{k^3+1}+\sqrt{k^3-1}}$$

$$= \frac{\cancel{k^3}+1-\cancel{k^3}+1}{\sqrt{k^3+1}+\sqrt{k^3-1}} \sim \frac{2}{2k^{3/2}} = \frac{1}{k^{3/2}}$$

Dato che $3/2 > 1$ converge per confronto asintotico

In alternativa

$(1+x)^{1/2} \sim 1 + \frac{x}{2}$ per $x \to 0$

$$a_k = k^{3/2}\left(\left(1+\frac{1}{k^3}\right)^{1/2} - \left(1-\frac{1}{k^3}\right)^{1/2}\right) \sim k^{3/2}\left(\cancel{1} + \frac{1/2}{k^3} - \left(\cancel{1} - \frac{1/2}{k^3}\right)\right)$$

$$\sim k^{3/2}\cdot\frac{1}{k^3} = \frac{1}{k^{3/2}}$$

1.j $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\sqrt{k}}}{k!}$ CONVERGE

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{\sqrt{k+1}}}{\underbrace{(\cancel{k+1})!}_{k+1}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{k^{\sqrt{k}}} = \frac{1}{k+1}\exp\left(\sqrt{k+1}\log(k+1) - \sqrt{k}\log(k)\right)$$

$$\sqrt{k+1}\log(k+1) = \sqrt{k}\sqrt{1+\tfrac{1}{k}}\left(\log(k)+\log\left(1+\tfrac{1}{k}\right)\right) = \sqrt{k}\log(k) + \underbrace{\frac{\log(k)}{2\sqrt{k}}}_{\to 0}(1+o(1))$$

$$= \frac{1}{k+1}\exp(o(1)) \longrightarrow 0 < 1$$

Converge per il criterio del rapporto.

1.k $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k!)}{k^3}$ CONVERGE

Notiamo che

$$\log(k!) = \underbrace{\log(1)}_{\le \log(k)} + \underbrace{\log(2)}_{\le \log(k)} + \dots + \underbrace{\log(k)}_{\le \log(k)} \le k\log(k).$$

Quindi

$$\frac{\log(k!)}{k^3} \le \frac{\cancel{k}\log(k)}{k^{\cancel{3}\,2}} = \frac{1}{k^2\log^{-1}(k)}$$

$\alpha = 2,\ \beta = -1$ converge!

Per confronto la serie data è convergente.

1.l $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log(k)}}$ DIVERGE A $+\infty$

Si ha che $2^{\log(k)} = \exp(\log(k)\cdot\log(2)) = k^{\log(2)}$

Dato che $\log(2)<1$ allora la serie diverge.

$\boxed{2.a}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k^2}{k^5+3}}_{a_k} (\underbrace{2x-1}_{z})^k$ CONVERGE PER $x \in [0,1]$.

Studiamo la serie di potenze $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$.

Centro 0. Raggio di convergenza:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)^2}{(k+1)^5+3} \cdot \frac{k^5+3}{k^2} \sim \frac{k^7}{k^7} = 1 \implies R = \frac{1}{1} = 1.$$

Estremi: per $z = \pm 1$

$$\left|\frac{k^2}{k^5+3}(\pm 1)^k\right| = \frac{k^2}{k^5+3} \sim \frac{1}{k^3} \quad \text{la serie converge.}$$

Quindi la serie converge per $z \in [-1,1]$ ossia per

$$-1 \leq 2x-1 \leq 1 \iff x \in [0,1].$$

$\boxed{2.b}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k^{3x}+k}$ CONVERGE PER $x \in \mathbb{R}$.

Proviamo ad applicare Leibniz.

$a_k \to 0$?

$$0 \leq a_k = \frac{\sqrt{k}}{\underbrace{k^{3x}}_{>0}+k} \leq \frac{\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$$

a_k è definitivamente decrescente?

Basta verificare che $f(k) = k^t + \sqrt{k}$ con $t = 3x - \frac{1}{2}$ è definitivamente crescente

$$f'(k) = t k^{t-1} + \frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{(2t k^{t-\frac{1}{2}} + 1)}{\underbrace{2\sqrt{k}}_{>0}} \quad (2tk^{t-\frac{1}{2}}+1) \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} +\infty & \text{se } t > 1/2 \\ 2 & \text{se } t = 1/2 \\ 1 & \text{se } t < 1/2 \end{cases}$$

in ogni caso > 0

Quindi la serie converge $\forall t \in \mathbb{R}$ ossia $\forall x \in \mathbb{R}$.

3.a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\cdot 4^k - 2\cdot 5^k}{20^{k-1}} = \frac{5}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\cdot 4^k - 2\cdot 5^k}{20^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(3\cdot 4\cdot\left(\frac{4}{20}\right)^{k-1} - 2\cdot 5\left(\frac{5}{20}\right)^{k-1}\right)$$

$$= 12\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1} - 10\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{12}{1-\frac{1}{5}} - \frac{10}{1-\frac{1}{4}} = 15 - \frac{40}{3} = \frac{5}{3}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x} \quad \text{per } |x|<1$$