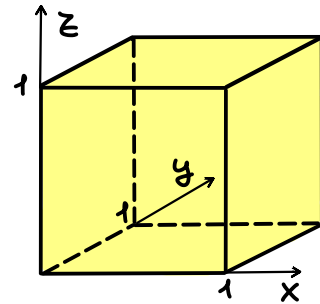


ANALISI MATEMATICA 2 - FOGLIO 8

1.a Calcolare $\iint_S (x^2 + z^2) dS$ dove S è la superficie del cubo $[0, 1]^3$.



Per simmetria $\iint_S x^2 dS = \iint_S z^2 dS$.

$S = \bigcup_{i=1}^6 S_i$ è regolare a pezzi:

$$S_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in [0, 1]\}, \quad S_2 = \{(x, y, 1) : x, y \in [0, 1]\}$$

e quindi

$$\iint_{S_1} x^2 dS = \iint_{S_2} x^2 dS = \int_0^1 \int_0^1 x^2 dx dy = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \left[y \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Inoltre

$$S_3 = \{(x, 0, z) : x, z \in [0, 1]\}, \quad S_4 = \{(x, 1, z) : x, z \in [0, 1]\},$$

$$S_5 = \{(0, y, z) : y, z \in [0, 1]\}, \quad S_6 = \{(1, y, z) : y, z \in [0, 1]\}$$

e così

$$\iint_{S_3} x^2 dS = \iint_{S_4} x^2 dS = \int_0^1 \int_0^1 x^2 dx dz = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \left[z \right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\iint_{S_5} x^2 dS = 0, \quad \iint_{S_6} x^2 dS = |S_6| = 1.$$

Infine

$$\iint_S (x^2 + z^2) dS = 2 \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} x^2 dS = 2 \left(4 \cdot \frac{1}{3} + 0 + 1 \right) = \frac{14}{3}.$$

1.b Calcolare $\iint_S x \sqrt{z^2 - 4x^2} dS$ dove S è

$$S = \{(x, y, z) : z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

como *cilindro*

Parametrizzazione di S :

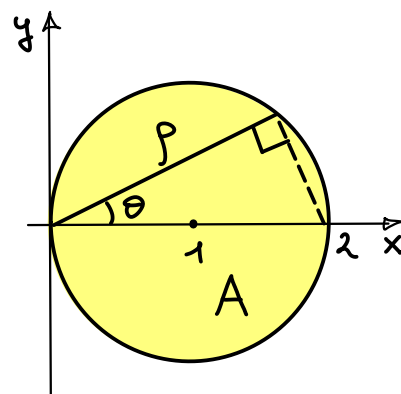
$$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, 2\sqrt{x^2 + y^2})$$

con $A = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

Così

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \left(-\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right).$$

Quindi $\|\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y\| = \sqrt{5}$ e



$$\iint_S x \sqrt{z^2 - 4x^2} dS = \iint_A x \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 4x^2} \cdot \sqrt{5} dx dy$$

2|y|

$$\stackrel{CP}{=} 2\sqrt{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \rho \cos\theta \cdot \rho |\sin\theta| \rho d\rho d\theta$$

$$\stackrel{CP}{=} 2\sqrt{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot |\sin\theta| \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= 8\sqrt{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \cdot |\sin\theta| d\theta = 16\sqrt{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta d(-\cos\theta)$$

theta-pair

$$= 16\sqrt{5} \left[-\frac{\cos^6\theta}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

1.c Calcolare $\iint_S \frac{z^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dS$ dove S è

$$S = \{(r \cos t, r \sin t, t) : r \in [0, 1], t \in [0, 2\pi]\}. \text{ elicoide}$$

Parametrizzazione di S :

$$\vec{\sigma}(r, t) = (r \cos t, r \sin t, t) \text{ con } A = [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Così

$$\vec{\sigma}_r \times \vec{\sigma}_t = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos t & \sin t & 0 \\ -r \sin t & r \cos t & 1 \end{bmatrix} = (\sin t, -\cos t, r).$$

Quindi $\|\vec{\sigma}_r \times \vec{\sigma}_t\| = \sqrt{1+r^2}$ e

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{z^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dS &= \iint_A \frac{t^2}{(1+r^2)^{3/2}} \sqrt{1+r^2} dr dt \\ &= \int_0^{2\pi} t^2 dt \cdot \int_0^1 \frac{dr}{1+r^2} \\ &= \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} \cdot \left[\arctan(r) \right]_0^1 \\ &= \frac{8\pi^3}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi^4}{3} \end{aligned}$$

1.d Calcolare $\iint_S \sqrt{(1+x)(1+y)-1} dS$ dove S è

$$S = \{(u^2, v^2, 2(u-v)), u, v \in [0, 1]\}. \text{ grafico di } f(x, y) = 2(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \text{ per } (x, y) \in [0, 1]^2.$$

Parametrizzazione di S :

$$\vec{\sigma}(u, v) = (u^2, v^2, 2(u-v)) \text{ con } A = [0, 1]^2.$$

Così

$$\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2u & 0 & 2 \\ 0 & 2v & -2 \end{bmatrix} = (-4v, 4u, 4uv).$$

Quindi $\|\vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v\| = 4\sqrt{v^2 + u^2 + u^2v^2}$ e

$$\begin{aligned} \iint_S \sqrt{(1+x)(1+y)-1} \, dS &= \iint_A \sqrt{u^2 + v^2 + u^2v^2} \cdot 4\sqrt{v^2 + u^2 + u^2v^2} \, du \, dv \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^1 (u^2 + v^2 + u^2v^2) \, du \, dv \\ &= 4 \left(\left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 \cdot 1 + \left[\frac{v^3}{3} \right]_0^1 \cdot 1 + \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 \cdot \left[\frac{v^3}{3} \right]_0^1 \right) \\ &= \frac{4}{3} \left(2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{28}{9}. \end{aligned}$$

2.a Calcolare il flusso $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove

$$\vec{F} = (3e^{x+y}, 2y-z, xy), \quad S = \partial D \text{ e } S$$

$$D = \{(x, y, z) : |x-1| + |y| \leq 1, 0 \leq z \leq x+y\}.$$

S è orientata verso l'esterno.

Applichiamo il teorema della divergenza:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(3e^{x+y}) + \frac{\partial}{\partial y}(2y-z) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 3e^{x+y} + 2$$

e allora

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \stackrel{TD}{=} \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) \, dx \, dy \, dz$$

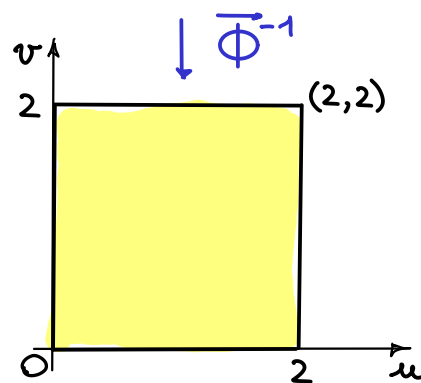
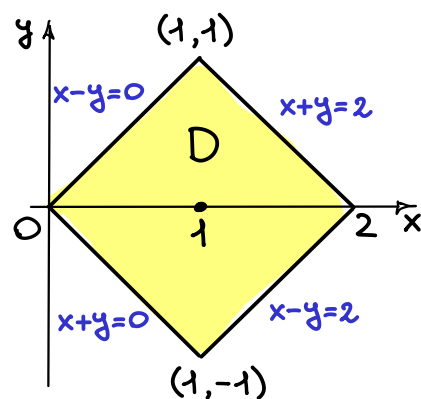
$$= \iint_{\{|x-1|+|y| \leq 1\}} (3e^{x+y} + 2) \left(\int_{z=0}^{x+y} dz \right) dx \, dy$$

$$= \iint_{\{|x-1|+|y| \leq 1\}} (3e^{x+y} + 2)(x+y) \, dx \, dy$$

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \stackrel{\Phi^{-1}}{\Rightarrow} \iint_{[0,2]^2} (3e^u + 2) u \left(\frac{1}{2} \right) du \, dv \quad \stackrel{|\det J_{\Phi}|}{=} \iint_{[0,2]^2} (3e^u + 2) u \, du \, dv$$

$$= \int_0^2 (3e^u u + 2u) \, du = \left[3e^u (u-1) + u^2 \right]_0^2$$

$$= 3e^2 + 4 - (-3) = 3e^2 + 7.$$



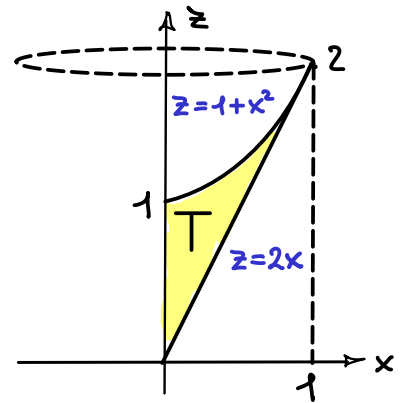
2.b Calcolare il flusso $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove

$$\vec{F} = (e^{y^2}, 5x^2y, 5y^2z), \quad S = \partial D \text{ è orientata verso}$$

l'esterno e D è generato dalla rotazione completa di

$$T = \{(x, 0, z) : 0 \leq 2x \leq z \leq 1 + x^2 \leq 2\}$$

intorno all'asse z .



Applichiamo il teorema della divergenza:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{y^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(5x^2y) + \frac{\partial}{\partial z}(5y^2z) = 5(x^2 + y^2).$$

e allora

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \stackrel{TD}{=} \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) \, dx \, dy \, dz$$

$$\stackrel{CC}{=} \int_{\rho=0}^1 5\rho^2 \left(\int_{z=2\rho}^{1+\rho^2} \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \right) dz \right) \rho \, d\rho = 10\pi \int_0^1 \rho^3 (1 + \rho^2 - 2\rho) \, d\rho$$

$$= 10\pi \left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^6}{6} - 2\frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 = 10\pi \cdot \frac{15 + 10 - 24}{60} = \frac{\pi}{6}.$$

2.C Calcolare il flusso $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove

$\vec{F} = (-5x^3, 2y^2+z, \sin(xy))$ e $S = \partial D$ orientata verso l'interno con

$$D = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{2} \leq 1 \right\}. \quad \text{ellissoide}$$

Applichiamo il teorema della divergenza:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(-5x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^2+z) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin(xy)) = -15x^2 + 4y.$$

e allora

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &\stackrel{\text{verso l'interno}}{=} - \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) \, dx \, dy \, dz \\ &\stackrel{\text{per fili}}{=} - \iint_{\left\{ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}} (-15x^2 + 4y) \left(\int_{z = -\sqrt{2(1 - \frac{x^2}{4} - y^2)}}^{\sqrt{2(1 - \frac{x^2}{4} - y^2)}} 1 \, dz \right) \, dx \, dy \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{2} \iint_{\left\{ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}} (15x^2 - 4y) \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2} \, dx \, dy$$

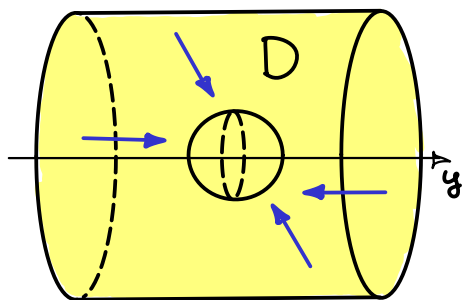
$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 2\rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} &\stackrel{\Phi}{=} 2\sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 (60\rho^2 \cos^2\theta - 4\rho \sin\theta) \sqrt{1-\rho^2} \cdot (2\rho) \, d\rho \, d\theta \\ &\quad \begin{matrix} \theta\text{-disponi} \\ |\det J_\Phi| \end{matrix} \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^1 (60\rho^2 \cdot \pi + 0) \sqrt{1-\rho^2} \cdot 2\rho \, d\rho$$

$$\begin{aligned} \begin{matrix} t = 1 - \rho^2 \\ dt = -2\rho \, d\rho \end{matrix} &\rightarrow 120\sqrt{2}\pi \int_0^1 (1-t) \sqrt{t} \, dt = 120\sqrt{2}\pi \left[\frac{2t^{3/2}}{3} - \frac{2t^{5/2}}{5} \right]_0^1 \end{aligned}$$

$$= 120\sqrt{2}\pi \cdot \frac{4}{15} = 32\sqrt{2}\pi.$$

2.d Calcolare il flusso $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove
 $\vec{F} = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ e $S = \partial D$ orientata verso
 l'interno con $D = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leq 4, |y| \leq 2\}$.



Dato che $\text{div}(\vec{F}) = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ (visto a lezione)
 e D contiene il punto $(0,0,0)$, per il teorema della
 divergenza

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{S_2} \langle \frac{\vec{m}}{r^2}, (-\vec{m}) \rangle dS \\ &= -\frac{1}{r^2} \cdot |S_2| = -\frac{4\pi r^2}{r^2} = -4\pi \end{aligned}$$

↖ verso l'interno

dove S_2 è una sfera di raggio $r > 0$ centrata in
 $(0,0,0)$, orientata verso l'interno e contenuta in D .

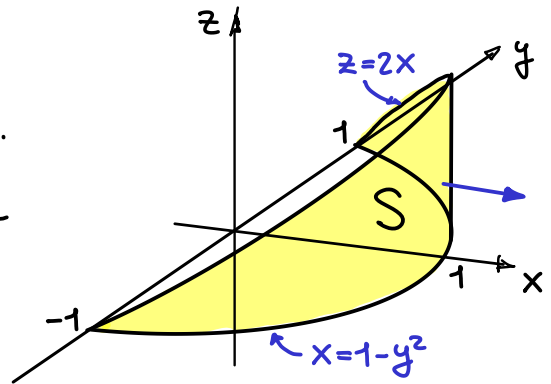
2.e Calcolare il flusso $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove

$$\vec{F} = (5x, 2xe^{y^2}, -3z) \text{ e}$$

$$S = \{(x, y, z) : x + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2x\}.$$

S è orientata in modo che

$$\vec{n} = (1, 0, 0) \text{ in } (1, 0, 0).$$



Parametrizzazione di S :

$$\vec{\sigma}(y, z) = (1 - y^2, y, z) \text{ con } A = \{(y, z) : 0 \leq z \leq 2(1 - y^2), y \in [-1, 1]\}.$$

Così

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1, 2y, 0) \text{ compatibile con l'orientazione data}$$

Dunque il flusso da calcolare è

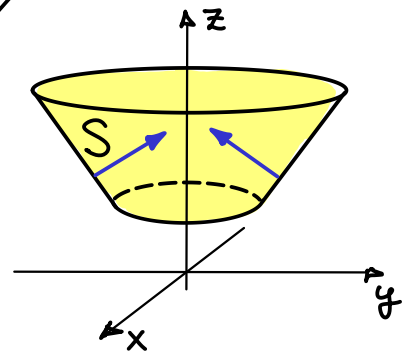
$$\begin{aligned} \iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iint_A \langle (5x, 2xe^{y^2}, -3z), (1, 2y, 0) \rangle dy dz \\ &= \int_{y=-1}^1 \left(\int_{z=0}^{2(1-y^2)} (5(1-y^2) + 4y(1-y^2)e^{y^2}) dz \right) dy \\ &= \int_{y=-1}^1 \left(\overbrace{5(1-y^2)}^{\text{pari}} + \overbrace{4y(1-y^2)e^{y^2}}^{\text{dispari}} \right) \overbrace{2(1-y^2)}^{\text{pari}} dy \\ &= 2 \cdot 10 \int_0^1 (1-y^2)^2 dy = 20 \left[y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_0^1 \\ &= 20 \cdot \frac{8}{15} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

2.8 Calcolare il flusso $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$

dove $\vec{F} = (x^2, z, \log(x^2 + y^2))$

e $S = \{(x, y, z) : z^2 = x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 2\}$.

S è orientata in modo che $\langle \vec{m}, \vec{k} \rangle \geq 0$.



Notiamo che S non interseca l'asse z dove \vec{F} non è definito.

Parametrizzazione di S :

$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ con $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Così

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \underline{1} \right).$$

Allora

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_A \langle (x^2, \overset{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \log(x^2 + y^2)), \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) \rangle dx dy$$

$$= \iint_A \left(-\overset{x\text{-disponi}}{\frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}} - \overset{y\text{-disponi}}{y} + \log(x^2 + y^2) \right) dx dy \quad \text{A è simmetrico rispetto } x=0, y=0$$

$$\stackrel{CP}{=} \int_{\rho=1}^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \log(\rho^2) \rho d\rho d\theta = 2\pi \left[\log(\rho) \rho^2 - \frac{\rho^2}{2} \right]_1^2 = 8\pi \log 2 - 3\pi.$$

$$\int \log(\rho^2) \rho d\rho = \int \log(\rho) \cdot 2\rho d\rho = \log(\rho) \cdot \rho^2 - \int \frac{\rho^2}{\rho} d\rho = \log(\rho) \rho^2 - \frac{\rho^2}{2} + c$$

2.9 Calcolare il flusso $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove

$$\vec{F} = (2z, 3y, x^2 + 4z) \text{ e } S = \{(x, y, z) : (x^2 + y^2)^{3/2} = z \leq 1\}.$$

S è orientata in modo che $\vec{m} = (0, 0, -1)$ in $(0, 0, 0)$.

In alternativa al calcolo diretto sia S_2 la superficie orientata

$$S_2 = \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e $\vec{m} = (0, 0, 1)$ e applichiamo

il teorema della divergenza a

$$D = \{(x, y, z) : (x^2 + y^2)^{3/2} \leq z \leq 1\}.$$

in modo che $\partial^+ D = S \cup S_2$:

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &\stackrel{TD}{=} \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) \, dx \, dy \, dz - \iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \\ &= \frac{21\pi}{5} - \frac{17}{4} = \frac{84 - 85}{20} \pi = -\frac{\pi}{20}. \end{aligned}$$

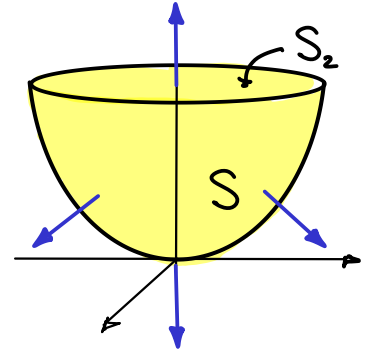
Infatti:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(2z) + \frac{\partial}{\partial y}(3y) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + 4z) = 0 + 3 + 4 = 7$$

$$\iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) \, dx \, dy \, dz \stackrel{CC}{=} 7 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 \left(\int_{z=\rho^3}^1 1 \, dz \right) \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= 7 \cdot 2\pi \int_0^1 (\rho - \rho^4) \, d\rho = 14\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 = \frac{21\pi}{5}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iint_{S_2} (x^2 + 4z) \, dx \, dy \stackrel{CP}{=} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^1 \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho \, d\rho \, d\theta + 4|S_2| \\ &= \pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 + 4\pi = \frac{17\pi}{4}. \end{aligned}$$

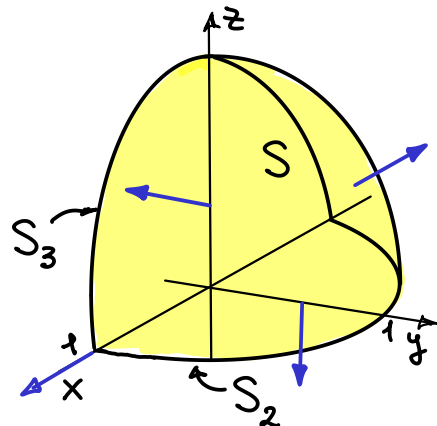


2. R Calcolare il flusso $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove

$$\vec{F} = (x^2 - y^3, 3y^2 + z, xz + y) \text{ e}$$

$$S = \{(x, y, z) : 0 \leq z = 1 - x^2 - y^2, y \geq 0\}.$$

S è orientata in modo che $\vec{m} = (0, 0, 1)$ in $(0, 0, 1)$.



In alternativa al calcolo diretto

siamo S_2 e S_3 le superfici orientate

$$S_2 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\} \text{ con } \vec{m} = (0, 0, -1)$$

$$S_3 = \{(x, 0, z) : 0 \leq z \leq 1 - x^2\} \text{ con } \vec{m} = (0, -1, 0)$$

e applichiamo il teorema della divergenza a

$$D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2, y \geq 0\}$$

in modo che $\partial^+ D = S \cup S_2 \cup S_3$:

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &\stackrel{TD}{=} \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz - \iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle - \iint_{S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \\ &= \frac{8}{5} - \left(-\frac{2}{3} - \frac{8}{15}\right) = \frac{24 + 10 + 8}{15} = \frac{42}{15} = \frac{14}{5} \end{aligned}$$

Infatti

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^3) + \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 + z) + \frac{\partial}{\partial z}(xz + y) = 3x + 6y$$

$$\begin{aligned} \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz &\stackrel{cc}{=} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^1 \int_{z=0}^{1-\rho^2} (3\rho \cos\theta + 6\rho \sin\theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^1 (3\rho^2(1-\rho^2)\cos\theta + 6\rho^2(1-\rho^2)\sin\theta) d\rho d\theta \end{aligned}$$

$$= 0 + 6 \left[\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \cancel{6} \cdot \frac{2}{15} \cdot 2 = \frac{8}{5}$$

e

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= - \iint_{S_2} (xz + y) dx dy \stackrel{CP}{=} - \int_0^\pi \int_0^1 (\rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= - \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

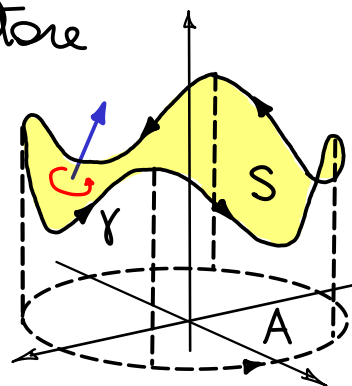
$$\begin{aligned} \iint_{S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= - \iint_{S_3} (3y^2 + z) dx dz = - \int_{x=-1}^1 \left(\int_{z=0}^{1-x^2} z dz \right) dx \\ &= - \int_0^1 \frac{(1-x^2)^2}{2} dx = - \left[x - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= - \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = -\frac{8}{15}. \end{aligned}$$

3.a

Usando il teorema del rotore calcolare $\int_Y \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove

$$\vec{F} = (\sin x, z(x-1), y(x+1)) \text{ e}$$

$$Y = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, z = 2 + x^2 y^2\}.$$



Y è orientata in modo che la sua proiezione su $z=0$ sia in verso antiorario.

$$\text{Sia } S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4, z = 2 + x^2 y^2\}.$$

Parametrizzazione cartesiana di S :

$$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, 2 + x^2 y^2) \text{ con } A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Allora $\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (-2xy^2, -2yx^2, 1)$ e $\vec{\sigma}$ induce su $\gamma = \partial^+ S$ l'orientazione richiesta. Calcolo del rotore:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin x & z(x-1) & y(x+1) \end{bmatrix} = (2, -y, z).$$

Quindi

$$\int_Y \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \stackrel{TR}{=} \iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle$$

$$= \iint_A \langle (2, -y, z), (-2xy^2, -2yx^2, 1) \rangle dx dy$$

$$= \iint_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} (-4xy^2 + 3x^2y^2 + 2) dx dy \stackrel{CP}{=} 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \underbrace{\rho^4 \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta}_{\frac{1}{4} \sin^2 2\theta} \rho d\rho d\theta + 2|A|$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta \left[\frac{\rho^6}{6} \right]_0^2 + 8\pi = \frac{1}{4} \pi \cdot 32 + 8\pi = 16\pi.$$

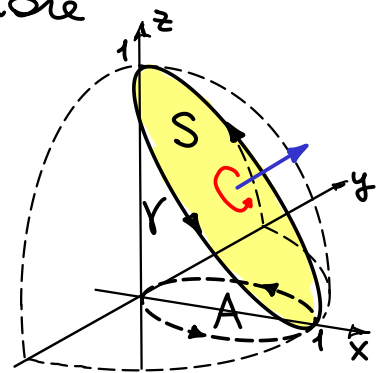
3.6

Usando il teorema del rotore
calcolare $\int \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove

$$\vec{F} = (y + ye^{xy}, xe^{xy}, x^3) \text{ e}$$

$$Y = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + z = 1\}$$

orientata in modo che la sua



proiezione su $z=0$ sia in verso antiorario.

$$\text{Sia } S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + z = 1\}.$$

Parametrizzazione cartesiana di S :

$$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, 1-x) \text{ con } A = \{(x, y) : x^2 + y^2 + (1-x)^2 \leq 1\}.$$

Allora $\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (1, 0, 1)$ e $\vec{\sigma}$ induce su $\gamma = \partial S$
l'orientazione richiesta. Calcolo del rotore:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + ye^{xy} & xe^{xy} & x^3 \end{bmatrix} = (0, -3x^2, -1).$$

Quindi

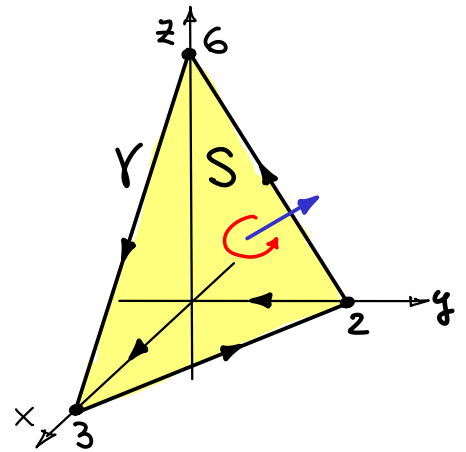
$$\begin{aligned} \int_Y \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &\stackrel{\text{TR}}{=} \iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle \\ &= \iint_A \langle (0, -3x^2, -1), (1, 0, 1) \rangle dx dy \\ &= - \iint_A dx dy = -|A| = -\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

∂A è un'ellisse di semiasse $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$x^2 + y^2 + (1-x)^2 = 1 \iff 2x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$\iff 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \iff \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

3.c Usando il teorema del rotore calcolare $\int_Y \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ dove $\vec{F} = (z+1, xz, y^2 - yz)$ e Y è



il bordo del triangolo di vertici $(3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 6)$ orientato in modo che la sua proiezione sul piano $z=0$ sia in verso antiorario.

Il piano che passa per i tre punti dati:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1 \quad \text{ovvia} \quad 2x + 3y + z = 6.$$

Parametrizzazione cartesiana di S tale che $\partial^+ S = Y$:

$$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, 6 - 2x - 3y) \quad \text{con} \quad A = \{(x, y) : x, y \geq 0, 2x + 3y \leq 6\}.$$

Allora $\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (2, 3, 1)$ che induce su $Y = \partial^+ S$

l'orientazione richiesta. Calcolo del rotore:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z+1 & xz & y^2 - yz \end{bmatrix} = (2y - z - x, 1, z).$$

Quindi

$$\int_Y \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \stackrel{\text{TR}}{=} \iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle$$

$$= \iint_A \langle (2y - \overset{6-2x-3y}{z} - x, 1, z), (2, 3, 1) \rangle dx dy$$

$$= \int_{x=0}^3 \left(\int_{y=0}^{2-\frac{2x}{3}} (-3 + 7y) dy \right) dx = (-3 + 7\bar{y}) \Big|_{y=0}^{\frac{2-3}{2}=3} |A| = -9 + 14 = 5.$$

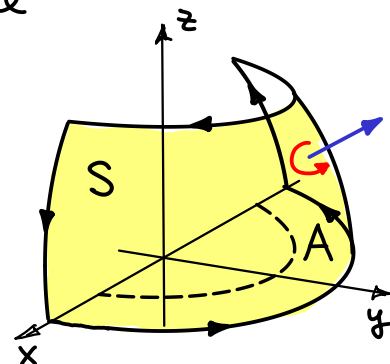
\uparrow
 $\frac{2}{3} = \frac{1}{3}(0+2+0)$

4.a Usando il teorema del rotore calcolare $\int_{\partial^+ S} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove

$$\vec{F} = (e^x, xy + 2x, x^2 + z^2) \text{ e}$$

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4 - z, 0 \leq z \leq 3, y \geq 0\}$$

orientata in modo che $\langle \vec{m}, \vec{F} \rangle \geq 0$.



Parametrizzazione cartesiana di S:

$$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2) \text{ con } A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}.$$

Allora $\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (2x, 2y, 1)$ e $\vec{\sigma}$ induce su $\gamma = \partial^+ S$ l'orientazione richiesta. Calcolo del rotore:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x & xy + 2x & x^2 + z^2 \end{bmatrix} = (0, -2x, y + 2).$$

Quindi

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle \stackrel{\text{TR}}{=} \iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle$$

$$= \iint_A \langle (0, -2x, y + 2), (2x, 2y, 1) \rangle dx dy$$

$$= \iint_A (-4xy + y + 2) dx dy$$

x-dispari

*simmetrico
su x=0*

$$\stackrel{\text{CP}}{=} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\rho=1}^2 \rho \sin \theta \rho d\rho d\theta + 2|A|$$

$\stackrel{=}{=} (4\pi - \pi)/2$

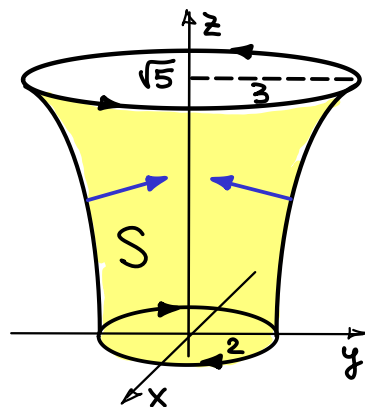
$$= \left[-\cos \theta \right]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_1^2 + 3\pi = 2 \frac{8-1}{3} + 3\pi = \frac{14}{3} + 3\pi.$$

4.b Usando il teorema del rotore calcolare $\int_{\partial S} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove

$$\vec{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} + xy^2, z \right) \text{ e}$$

$$S = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2 + 4, 0 \leq z \leq \sqrt{5} \}$$

orientata in modo che $\langle \vec{n}, \vec{k} \rangle \geq 0$.



Notiamo che S non interseca l'asse z dove \vec{F} non è definito.

Parametrizzazione cartesiana di S :

$$\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2 - 4}) \text{ con } A = \{ (x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \}$$

Allora

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}, \underline{\underline{1}} \right)$$

che induce su S l'orientazione richiesta.

Calcolo del rotore:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} + xy^2 & z \end{bmatrix} = (0, 0, y^2).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle &\stackrel{\text{TR}}{=} \iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle \\ &= \iint_A \langle (0, 0, y^2), (*, *, 1) \rangle dx dy \\ &= \iint_A y^2 dx dy \stackrel{\text{CP}}{=} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=2}^3 \rho^2 \sin^2 \theta \rho d\rho d\theta \\ &= \pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_2^3 = \frac{\pi}{4} (81 - 16) = \frac{65\pi}{4}. \end{aligned}$$

4.C

Usando il teorema del rotore calcolare $\int_{\partial^+ S} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$ dove

$$\vec{F} = (z^2 + x^2y, 3xyz, 2xz) \text{ e}$$

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 3 - x - y\}$$

orientata in modo che $\vec{m} = (-1, 0, 0)$ in $(1, 0, 0)$.

Parametrizzazione di S :

$$\vec{\sigma}(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

$$\text{con } A = \{(\theta, z) : \theta \in [0, 2\pi], 0 \leq z \leq 3 - \cos\theta - \sin\theta\}$$

Così $\vec{\sigma}_\theta \times \vec{\sigma}_z = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ induce su S l'orientazione opposta perché per $\theta = 0$ e $z = 0$, ossia nel punto $(1, 0, 0)$, $\vec{m}^+ = (1, 0, 0)$.

Calcolo del rotore:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 + x^2y & 3xyz & 2xz \end{bmatrix} = (-3xy, 0, 3yz - x^2).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ S} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle &\stackrel{\text{TR}}{=} \iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle \\ &= \underbrace{- \iint_A}_{\text{orientazione}} \langle (-3xy, 0, 3yz - x^2), (\cos\theta, \sin\theta, 0) \rangle d\theta dz \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{z=0}^{3-\cos\theta-\sin\theta} 3\cos^2\theta \sin\theta dz \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (9\cos^2\theta \sin\theta - 3\cos^3\theta \sin\theta - 3\overbrace{\cos^2\theta \sin^2\theta}^{\sin^2(2\theta)/4}) d\theta \\ &\stackrel{\theta \text{ dispari}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} (0 + 0 - \frac{3}{4} \sin^2(2\theta)) d\theta = -\frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

