ANALISI MATEMATICA 2 - FOGLIO 3

1.a $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{y} & \text{se } y\neq 0 \\ 0 & \text{se } y=0 \end{cases}$ è continua in $\mathbb{R}^2$

Basta verificare che $\forall x_0\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y)=f(x_0,0)=0.$$

Si noti che se $(x,y)\to(x_0,0)$ allora $xy\to 0$ e

$$1-\cos(xy)=\frac{1}{2}(xy)^2\cdot(1+o(1))$$

Quindi per $y\neq 0$,

$$f(x,y)=\frac{1-\cos(y)}{y}=\frac{1}{2}\frac{x^2y^{\cancel{2}}}{\cancel{y}}(1+o(1))\xrightarrow[y\to 0]{x\to x_0} 0.$$

1.b $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{y} & \text{se } y\neq 0 \\ x^3 & \text{se } y=0 \end{cases}$ è continua in $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0): x\neq 0,\pm 1\}$

Basta verificare per quali $x_0\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y)=f(x_0,0)=x_0^3.$$

Per $(x,y)\to(x_0,0)$ si ha che $xy\to 0$

$$\operatorname{sen}(xy)=xy(1+o(1)).$$

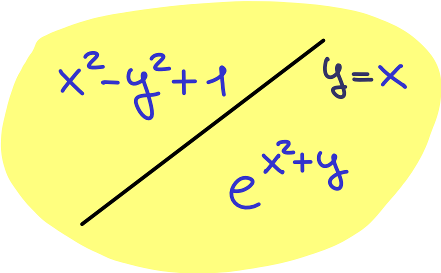
Quindi per $y\neq 0$

$$f(x,y)=\frac{\operatorname{sen}(xy)}{y}=\frac{x\cancel{y}}{\cancel{y}}(1+o(1))\xrightarrow[y\to 0]{x\to x_0} x_0$$

e la continuità è verificata nei punti in cui $x_0^3=x_0$ ossia $x_0=0,1,-1$.

$\boxed{1.c}$

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{x^2+y} & \text{se } y<x \\ x^2-y^2+1 & \text{se } y\geq x \end{cases}$$ è continua in $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,x): x\neq 0,-1\}$



Dato che $(x,y)\to e^{x^2+y}$ e $(x,y)\to x^2-y^2+1$ sono continue in $\mathbb{R}^2$, la continuità di f è verificata in $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,x): x\in\mathbb{R}\}$ e nei punti lungo la retta $y=x$ tali che

$$e^{x^2+x}=\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+1 \iff x^2+x=0 \iff x=0,-1.$$

$\boxed{1.d}$

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^2\operatorname{sen}(xy)}{(3x^2+5y^2)^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Si noti che $3x^2+5y^2=0$ se e solo se $(x,y)=(0,0)$.
La funzione data non è continua in $(0,0)$ perché per $y=x$ con $x\neq 0$, per $x\to 0$

$$f(x,x)=\frac{x^2\operatorname{sen}(x^2)}{(8x^2)^2}=\frac{1}{64}\cdot\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\longrightarrow\frac{1}{64}\neq 0.$$

2.a $f(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ Piano tangente in $(1,1)$?

$$f(1,1)=\operatorname{arctg}(1)=\frac{\pi}{4}$$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{-y/x^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2},\frac{1/x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) \Rightarrow \nabla f(1,1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Piano tangente in $(1,1)$:

$$z=\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)+\left(\frac{1}{2}\right)(y-1)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}.$$

2.b $f(x,y)=\log(\underbrace{|x+y|}_{}+y^2)$ Piano tangente in $(-2,1)$?

$= -x-y$ in un intorno di $(-2,1)$

$$f(-2,1)=\log(|-1|+1)=\log(2)$$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{-1}{-x-y+y^2},\frac{-1+2y}{-x-y+y^2}\right) \Rightarrow \nabla f(-2,1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Piano tangente in $(-2,1)$:

$$z=\log(2)-\frac{1}{2}(x+2)+\frac{1}{2}(y-1)=\log(2)-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}.$$

2.c $f(x,y)=\sqrt{x^2+x-2y}$ Piano tangente in $(2,1)$?

$$f(2,1)=\sqrt{4+2-2}=2$$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2y}},\frac{-2}{2\sqrt{x^2+x-2y}}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla f(2,1)=\left(\frac{5}{4},-\frac{1}{2}\right)$$

Piano tangente in $(2,1)$:

$$z=2+\frac{5}{4}(x-2)-\frac{1}{2}(y-1)=\frac{5}{4}x-\frac{y}{2}.$$

$\boxed{2.d}$ $f(x,y) = x^y + y^x$ Piano tangente in $(1,1)$?

$f(1,1) = 1 + 1 = 2$

$\nabla f(x,y) = \left(y x^{y-1} + y^x \log(y) , x^y \log(x) + x y^{x-1} \right)$

$\Rightarrow \nabla f(1,1) = (1,1)$.

Piano tangente in $(1,1)$:

$$z = 2 + 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) = x + y.$$

$\boxed{3.a}$ $f(x,y)=(1+x+y^2)^3$ $\quad T_2$ in $(0,0)$?

Ricordiamo che $x^\alpha y^\beta = o(x^2+y^2)$ se $\alpha+\beta>2$.
Allora

$$(1+(x+y^2))^3 = 1+3(x+y^2)+3(x+y^2)^2+(x+y^2)^3$$
$$= 1+3x+3x^2+3y^2+o(x^2+y^2)$$

e per l'unicità di T_2,

$$T_2(x,y) = 1+3x+3x^2+3y^2.$$

$\nabla=(3,0)$
$H=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$\boxed{3.b}$ $f(x,y)=\dfrac{e^{xy}}{(1-x)(1-2y)}$ $\quad T_2$ in $(0,0)$?

$$\frac{e^{xy}}{(1-x)(1-2y)} = (1+xy+o(x^2+y^2))\cdot(1+x+x^2+o(x^2+y^2))$$
$$\cdot(1+2y+4y^2+o(x^2+y^2))$$
$$=(1+xy+o(x^2+y^2))\cdot(1+x+2y+x^2+2xy+4y^2+o(x^2+y^2))$$
$$=1+x+2y+x^2+3xy+4y^2+o(x^2+y^2).$$

Quindi

$$T_2(x,y)=1+x+2y+x^2+3xy+4y^2.$$

$\nabla=(1,2)$
$H=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

$\boxed{3.c}$ $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(\pi xy)}{\pi\sqrt{x}}$ $\quad T_2$ in $(1,2)$?

Siano $u=x-1$ e $v=y-2$ allora per $(x,y)\to(1,2)$ si ha che $(u,v)\to(0,0)$ e

$$\operatorname{sen}(\pi xy)=\operatorname{sen}(\pi(u+1)(v+2))=\operatorname{sen}(\pi(uv+2u+v)+2\pi)$$
$$=\operatorname{sen}(\pi(uv+2u+v))$$
$$=\pi(uv+2u+v)+o(u^2+v^2).$$

Inoltre $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=(1+u)^{-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{u}{2}+o(u).$

Così

$$f(x,y)=\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}\left((uv+2u+v)+o(u^2+v^2)\right)\cdot\left(1-\frac{u}{2}+o(u)\right)$$

$$=2u+v+uv-u^2-\frac{uv}{2}+o(u^2+v^2)$$

$$=2u+v-u^2+\frac{uv}{2}+o(u^2+v^2).$$

Quindi

$$T_2(x,y)=2(x-1)+(y-2)-(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)(y-2).$$

$\boxed{3.d}$ $\quad f(x,y)=4\log\left(\frac{\sqrt{e^x-y}}{\cos(y)}\right)$ $\quad T_2$ in $(0,0)$?

Per $(x,y)\to(0,0)$

$$f(x,y)=\frac{4}{2}\log(e^x-y)-4\log(\cos(y))$$

$$=2\log\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-y\right)-4\log\left(1-\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)$$

$$=2\left(x-y+\frac{x^2}{2}-\frac{\left(x-y+\frac{x^2}{2}\right)^2}{2}+o(x^2+y^2)\right)-4\left(-\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)$$

$$=2x-2y+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+2xy-y^2+2y^2+o(x^2+y^2)$$

$$=2x-2y+2xy+y^2+o(x^2+y^2).$$

Quindi

$$T_2(x,y)=2x-2y+2xy+y^2.$$

$\boxed{4.a}$ $f(x,y)=x^3-y^3-3x+12y+2$ Punti stazionari?

$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ $\nabla f(x,y)=(3x^2-3,-3y^2+12)=(0,0)$

$$\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix}(1,2),\ (1,-2) \\ (-1,2),\ (-1,-2)\end{matrix}}$$

Punti stazionari

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix}$$

Quindi

$(1,2)$: $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ SELLA

$(1,-2)$: $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ MINIMO RELATIVO

$(-1,2)$: $\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ MASSIMO RELATIVO

$(-1,-2)$: $\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$ SELLA

Non ci sono max/min assoluti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0)=\lim_{x\to\pm\infty}(x^3-3x+2)=\pm\infty.$$

$\boxed{4.b}$ $f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2}$ Punti stazionari?

$D=\mathbb{R}^2$, $f\in C^2(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$, f non è derivabile in $(0,0)$

Per $(x,y)\neq(0,0)$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\overset{4}{\cancel{8}}x}{\cancel{2}\sqrt{4x^2+y^2}},\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{4x^2+y^2}}\right)=(0,0)$$

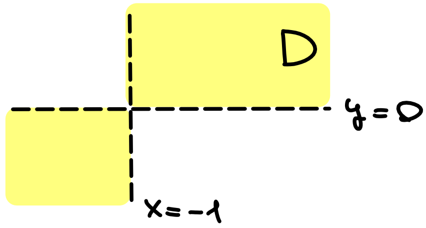
Non ci sono punti stazionari!

$(0,0)$ è un punto di minimo assoluto:

$$f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2}\geq 0=f(0,0)\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

$\boxed{4.c}$ $f(x,y)=x\log(y+yx)$ Punti stazionari?

Dominio: $y+yx=y(1+x)>0$



$f\in C^2(D)$

$$\nabla f(x,y)=\left(\log(y+yx)+\underbrace{\left(\frac{x\cdot y}{y+yx}\right)}_{=\frac{x}{1+x}},\ \underbrace{\left(\frac{x(1+x)}{y+yx}\right)}_{=\frac{x}{y}}\right)=(0,0)$$

$$\begin{cases}\log(y+yx)+\dfrac{x}{1+x}=0\\ \dfrac{x}{y}=0\end{cases}\iff\begin{cases}\log(y)=0\\ x=0\end{cases}\quad \boxed{(0,1)}$$

Punti stazionari

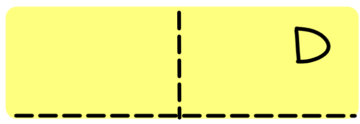
Per $x>-1$ e $y>0$, $\log(y+yx)=\log(y)+\log(1+x)$

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{(1+x)^2} & \dfrac{1}{y}\\ \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2}\end{bmatrix}\Rightarrow H_f(0,1)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$\det(H)=-1$ SELLA

$\boxed{4.d}$ $f(x,y)=\log\left(\frac{x^2}{y}\right)-\frac{x^2}{2}+1+y$ Punti stazionari?

Dominio: $\frac{x^2}{y}>0\iff x\neq 0,\ y>0$



$f\in C^2(D)$

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}-x,\ -\frac{1}{y}+1\right)=(0,0)$$

$$\begin{cases}\dfrac{2-x^2}{x}=0\\ -\dfrac{1}{y}+1=0\end{cases}\iff\begin{cases}x^2=2\\ y=1\end{cases}\iff\boxed{(\sqrt{2},1)\quad(-\sqrt{2},1)}$$

Punti stazionari

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix}-\dfrac{2}{x^2}-1 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{y^2}\end{bmatrix}\Rightarrow H_f(\pm\sqrt{2},1)=\begin{bmatrix}-2^{-} & 0\\ 0 & 1^{+}\end{bmatrix}$$ SELLA

$\boxed{4.e}$ $f(x,y)=(x^2-y-1)(1-x^2-y^2)$ Punti stazionari?

$$=2x^2-x^4-x^2y^2-y+yx^2+y^3-1+y^2$$

$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{cases} f_x(x,y)=4x-4x^3-2xy^2+2xy=2x\,(2-2x^2-y^2+y)=0 \\ f_y(x,y)=-2x^2y-1+x^2+3y^2+2y=x^2(1-2y)+3y^2+2y-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 3y^2+2y-1=0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x^2=2-y^2+y \\ (2-y^2+y)(1-2y)+6y^2+4y-2=0 \end{cases}$$

$(3y-1)(y+1)=0$

$$\boxed{\begin{matrix}(0,\frac{1}{3})\\(0,-1)\end{matrix}}$$

$\cancel{2}-y^2+y-\cancel{4y}+2y^3-2y^2+6y^2+\cancel{4y}-2=0$

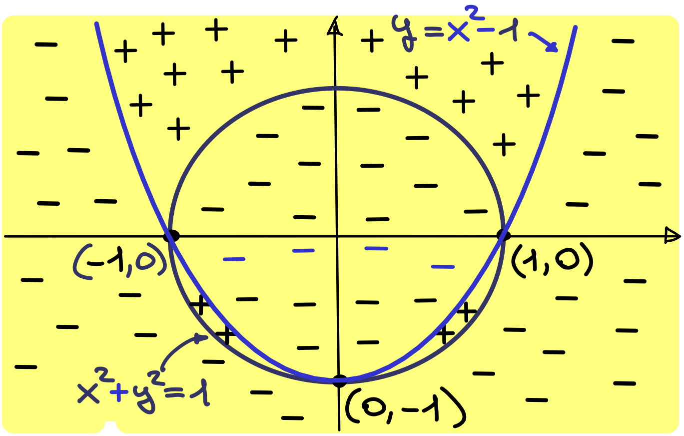
$2y^3+3y^2+y=0$

$y(2y^2+3y+1)=0 \quad y=0,-1,-\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y=0 \\ 2x^2=2 \end{cases} \cup \begin{cases} y=1 \\ 2x^2=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=-\frac{1}{2} \\ 2x^2=\frac{5}{4} \end{cases}$$

$(1,0)$	$\cancel{(0,-1)}$	$\left(\sqrt{\frac{5}{8}},-\frac{1}{2}\right)$
$(-1,0)$	già presente	$\left(-\sqrt{\frac{5}{8}},-\frac{1}{2}\right)$

Esaminando il segno di f si trova che



i punti stazionari $(1,0)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$ dove la funzione vale 0 sono tutti punti di SELLA.

Per $(0,\frac{1}{3})$ e $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{8}},-\frac{1}{2}\right)$ calcoliamo la matrice hessiana

$$f_{xx}(x,y)=4-12x^2-2y^2+2y$$
$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-4xy+2x$$
$$f_{yy}(x,y)=-2x^2+6y+2$$

Così

$$H_f\left(0,\tfrac{1}{3}\right)=\begin{bmatrix}\frac{40}{9}^{+} & 0\\ 0 & 4^{+}\end{bmatrix} \Rightarrow \left(0,\tfrac{1}{3}\right) \text{ MINIMO RELATIVO}$$

$$H_f\left(\pm\sqrt{\tfrac{5}{8}},-\tfrac{1}{2}\right)=\begin{bmatrix}-5 & \pm\sqrt{10}\\ \pm\sqrt{10} & -\frac{9}{4}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} t_2(H)<0,\ \det(H)=\frac{5}{4}>0 \\ \left(\pm\sqrt{\frac{5}{8}},-\frac{1}{2}\right) \text{ MASSIMO RELATIVO}\end{array}$$

$\boxed{4.f}$ $f(x,y)=x^4-xy^2+y^2$ Punti stazionari?

$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\nabla f(x,y)=(4x^3-y^2,-2xy+2y)=(0,0)$

$$\begin{cases}4x^3-y^2=0\\ 2y(1-x)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ 4x^3=0\end{cases} \cup \begin{cases}x=1\\ 4=y^2\end{cases}$$

$y=0$ $\quad x=1$ $\quad x=0$ $\quad y=\pm 2$

$$\boxed{(0,0),(1,2),(1,-2)}$$

Matrice hessiana:

$f_{xx}(x,y)=12x^2$; $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-2y$, $f_{yy}(x,y)=-2x+2$.

$$H_f(0,0)=\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix} \Rightarrow \det(H)=0\ ?$$

$$f(x,y)=\underbrace{x^4}_{\geq 0}+\underbrace{y^2}_{\geq 0}\underbrace{(1-x)}_{\to 1 \text{ per } (x,y)\to(0,0)}\geq 0\geq f(0,0) \quad \text{in un intorno di } (0,0)$$

quindi è >0 in un intorno di $(0,0)$

Ne segue che $(0,0)$ è un punto di MINIMO RELATIVO

$$H_f(1,\pm 2)=\begin{bmatrix}12 & \mp 4\\ \mp 4 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \det(H)=-16<0$$

$(1,\pm 2)$ sono punti di SELLA

4.g

$f(x,y) = xe^y - ye^x$ Punti stazionari?

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\nabla f(x,y) = (e^y - ye^x,\ xe^y - e^x) = (0,0)$

$$\begin{cases} e^y - ye^x = 0 \\ xe^y - e^x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e^y(1-xy) = 0 \to xy = 1\ ,\ y = \frac{1}{x} \\ e^x = xe^y \to e^x = xe^{1/x} \end{cases}$$

L'equazione $e^x = xe^{1/x}$ ha un'unica soluzione $x=1$.
Infatti $x>0$ e applicando il logaritmo otteniamo l'equazione equivalente

$$h(x) \overset{d}{=} x - \log(x) - \frac{1}{x} = 0 .$$

Per $x>0$,

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$$

0 + + + + + + +

h è strettamente crescente, $h(1) = 0$ e quindi $x=1$ è l'unico zero di h.

L'unico punto stazionario di f è $\boxed{(1,1)}$

Matrice hessiana:

$f_{xx}(x,y) = -ye^x$; $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^y - e^x$, $f_{yy}(x,y) = xe^y$

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} -e^{\,-} & 0 \\ 0 & e^{\,+} \end{bmatrix} \Rightarrow (1,1) \text{ è un punto di SELLA.}$$

4.h

$f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$ Punti stazionari?

$$f \in C^2(\mathbb{R}^2),\ \nabla f(x,y) = \left(\frac{1+x^2+y^2 - x\cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{-x\cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \right) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 1 - x^2 + y^2 = 0 \\ -2xy = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 + y^2 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ 1 - x^2 = 0 \end{cases}$$

$x=0$ $\quad y=0$ $\qquad \emptyset \qquad x = \pm 1$

Così i punti stazionari sono

$$\boxed{(1,0) \quad (-1,0)}$$

Matrice hessiana:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{(1-x^2+y^2)(-2\cdot 2x)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{(1-x^2+y^2)(-2\cdot 2y)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{(-2xy)(-2\cdot 2y)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$H_f(1,0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}^{-} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}^{-} \end{bmatrix} \Rightarrow (1,0) \text{ è un punto di MASSIMO RELATIVO}$$

$$H_f(-1,0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}^{+} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}^{+} \end{bmatrix} \Rightarrow (-1,0) \text{ è un punto di MINIMO RELATIVO}$$

4.i $f(x,y) = e^x(2x^2 - xy + y^2)$ Punti stazionari?

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\nabla f(x,y) = \left(e^x(2x^2 - xy + y^2 + 4x - y),\ e^x(-x+2y)\right)$.

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 + 4x - y = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y^2 - 2y^2 + y^2 + 8y - y = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

$7y(y+1) = 0$

$y = 0 \qquad y = -1$

I punti stazionari sono

$$\boxed{(0,0),\ (-2,-1)}$$

Matrice hessiana:

$$f_{xx}(x,y) = e^x(2x^2 - xy + y^2 + 4x - y + 4x - y + 4)$$

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=e^x(-x+2y-1)$$

$$f_{yy}(x,y)=2e^x$$

$$H_f(0,0)=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} tr(H)=8>0 \\ det(H)=7>0\end{array} \Rightarrow$$ (0,0) è un punto di MINIMO RELATIVO

$$H_f(-2,-1)=e^{-2}\begin{bmatrix}-3 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix} \quad det(H)=-7\cdot e^{-4}<0$$

$\Rightarrow$ $(-2,-1)$ è un punto di SELLA.

$\boxed{4.j}$ $f(x,y)=(x^2+xy)e^{y-x}$ Punti stazionari?

$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\nabla f(x,y)=\left((2x+y-x^2-xy)e^{y-x},(x+x^2+xy)e^{y-x}\right)$

$$\begin{cases}2x+y-x^2-xy=0\\ x+x^2+xy=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases} \cup \begin{cases}y=-1-x \rightarrow y=-\frac{3}{2}\\ 2x-1-\cancel{x}-\cancel{x^2}+\cancel{x}+\cancel{x^2}=0\end{cases}$$

$\hookrightarrow x=\frac{1}{2}$

$x(1+x+y)=0$

$x=0 \qquad y=-1-x$

I punti stazionari sono

$$\boxed{(0,0),\ \left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{3}{2}\right)}$$

Matrice hessiana:

$$f_{xx}(x,y)=(2-2x-y-2x-y+x^2+xy)e^{y-x}$$

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=(1-x+2x+y-x^2-xy)e^{y-x}$$

$$f_{yy}(x,y)=(x+x+x^2+xy)e^{y-x}$$

$$H_f(0,0)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad det(H)=-1<0 \Rightarrow$$ (0,0) è un punto di SELLA

$$H_f\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)=e^{-2}\begin{bmatrix} 5/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} tr(H)&=e^{-2}\cdot 3>0 \\ det(H)&=e^{-4}>0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ è un punto di MINIMO RELATIVO

4.K $f(x,y)=sen(x)+sen(y)$ Punti stazionari?

$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\nabla f(x,y)=(\cos(x),\cos(y))$

$$\begin{cases} \cos(x)=0 & \rightarrow \quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z} \\ \cos(y)=0 & \rightarrow \quad y=\frac{\pi}{2}+j\pi \quad \forall j\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Ci sono infiniti punti stazionari:

$$\boxed{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+j\pi\right) \quad \forall k,j\in\mathbb{Z}}$$

Matrice hessiana:

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix} -sen(x) & 0 \\ 0 & -sen(y) \end{bmatrix}$$

Quindi

1) Se k e j sono pari

$$H_f\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+j\pi\right)=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{MASSIMO RELATIVO}$$

2) Se k e j sono dispari

$$H_f\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+j\pi\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{MINIMO RELATIVO}$$

3) Se k è pari e j è dispari

$$H_f\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+j\pi\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{SELLA}$$

4) Se k è dispari e j è pari

$$H_f\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+j\pi\right)=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{SELLA}$$

$\boxed{4.l}$ $f(x,y)=\text{sen}(x)+\text{sen}(y)+\text{sen}(x+y)$

Punti stazionari?

$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\nabla f(x,y)=(\cos(x)+\cos(x+y), \cos(y)+\cos(x+y))$

$$\begin{cases}\cos(x)+\cos(x+y)=0\\ \cos(y)+\cos(x+y)=0\end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni otteniamo $\cos(x)=\cos(y)$ da cui $x=y+2k\pi$, $\forall k\in\mathbb{Z}$ oppure $x=-y+2k\pi$, $\forall k\in\mathbb{Z}$

1) $x=y+2k\pi$

$\cos(x)+\cos(2x+2k\pi)=0$

$\cos(x)+\cos(2x)=0$

$\cos(x)+\cos^2(x)-\text{sen}^2(x)=0$

$\cos(x)+\cos^2(x)-1+\cos^2(x)=0$

$2\cos(x)+\cos(x)-1=0$

$$\cos(x)=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4} \begin{cases}\frac{1}{2} & x=\pm\frac{\pi}{3}+2j\pi \\ -1 & x=\pi+2j\pi\end{cases} \quad \forall j\in\mathbb{Z}$$

2) $x=-y+2k\pi$

$\cos(x)+\cos(0+2k\pi)=0$

$\cos(x)=-1$ $\quad x=\pi+2j\pi$, $\forall j\in\mathbb{Z}$

Ci sono infiniti punti stazionari:

$$\boxed{\left(\pm\frac{\pi}{3}+2j\pi, \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\right), (\pi+2j\pi, \pi+2k\pi) \ \forall k,j\in\mathbb{Z}}$$

Matrice hessiana:

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix}-\text{sen}(x)-\text{sen}(x+y) & -\text{sen}(x+y)\\ -\text{sen}(x+y) & -\text{sen}(y)-\text{sen}(x+y)\end{bmatrix}$$

1) $H_f\left(\frac{\pi}{3}+2j\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right) = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$

$tr(H) = -2\sqrt{3} < 0$, $\det(H) = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} > 0$

$\left(\frac{\pi}{3}+2j\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$ è un punto di MASSIMO RELATIVO

2) $H_f\left(-\frac{\pi}{3}+2j\pi, -\frac{\pi}{3}+2k\pi\right) = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$tr(H) = 2\sqrt{3} > 0$, $\det(H) = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} > 0$

$\left(-\frac{\pi}{3}+2j\pi, -\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$ è un punto di MINIMO RELATIVO.

3) $H_f(\pi+2j\pi, \pi+2k\pi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$?

Visto che la funzione è periodica di periodo 2π sia rispetto a x che a y, basta esaminare il caso $j=k=0$ ossia il punto (π,π).

Restringendo f lungo $y=x$ abbiamo che

$$f(x,x) = 2\,\text{sen}(x) + \text{sen}(2x)$$
$$= 2\,\text{sen}(x)\,\underbrace{(1+\cos(x))}_{\geq 0}$$

$+\;+ \quad \pi \quad -\;-$ in un intorno di $x=\pi$

Dato che $f(\pi,\pi)=0$ e in un intorno del punto (π,π) la f cambia segno allora (π,π) è un punto di SELLA.

5.a $f(x,y)=(x-y)^4-8(x-y)^2$ Che tipo di punto è $(0,0)$?

$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f(x,y)=-8(x-y)^2+o(x^2+y^2)$

da cui $\qquad = -8x^2+16xy-8y^2+o(x^2+y^2)$

$f(0,0)=0$, $\nabla f(0,0)=(0,0)$, $H_f(0,0)=16\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ $\det(H)=0$

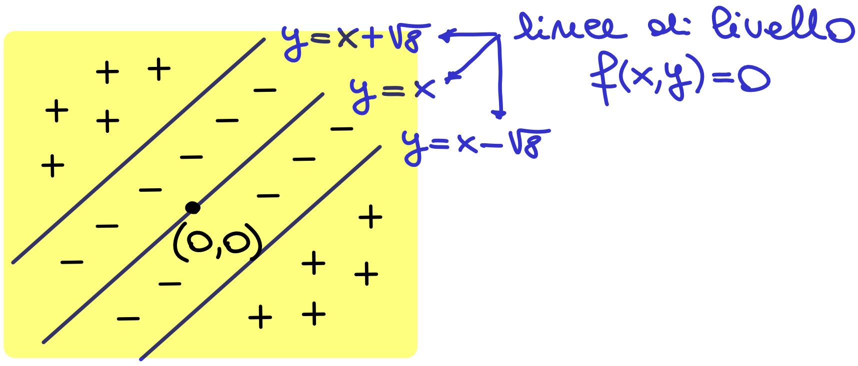
Abbiamo che

$$f(x,y)=\underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0}\underbrace{\left((x-y)^2-8\right)}_{\to -8 \text{ per } (x,y)\to(0,0)}\leq 0=f(0,0)$$ in un intorno di $(0,0)$

quindi è <0 in un intorno di $(0,0)$

Quindi $(0,0)$ è un punto di MASSIMO RELATIVO

Segno di f



5.b $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$ Che tipo di punto è $(0,0)$?

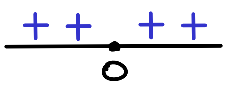
$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$,

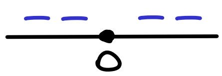
$f(x,y)=-2(x-y)^2+o(x^2+y^2)$

da cui $\qquad =-2x^2+4xy-2y^2+o(x^2+y^2)$

$f(0,0)=0$, $\nabla f(0,0)=(0,0)$, $H_f(0,0)=4\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ $\det(H)=0$

Restringendo la f si ha che

$y=x$: $f(x,x)=2x^4$ 

$y=0$: $f(x,0)=x^4-2x^2=x^2(x^2-2)$ 

Quindi $(0,0)$ è un punto di SELLA.

$\boxed{5.c}$ $f(x,y) = 1 + 2x^2y^2 - x^4y^4$

Che tipo di punto è $(0,0)$?

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f(x,y) = 1 + o(x^2+y^2)$

da cui

$$f(0,0)=0,\ \nabla f(0,0)=(0,0),\ H_f(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad H=O$$

Abbiamo che

$$f(x,y) = 1 + \underbrace{x^2y^2}_{\geq 0}\underbrace{(2-x^2y^2)}_{\to 2 \text{ per } (x,y)\to(0,0)} \geq 1 = f(0,0) \text{ in un intorno di } (0,0)$$

quindi è >0 in un intorno di $(0,0)$

Quindi $(0,0)$ è un punto di MINIMO RELATIVO.

$\boxed{5.d}$ $f(x,y) = (y-2x^2)(y-x^2)$

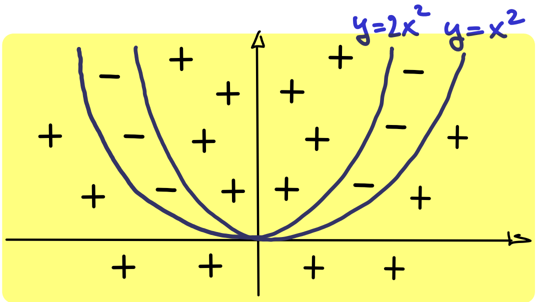
Che tipo di punto è $(0,0)$?

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $f(x,y) = y^2 + o(x^2+y^2)$

da cui

$$f(0,0)=0,\ \nabla f(0,0)=(0,0),\ H_f(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det(H)=0$$

Segno di f



Restringendo la f si ha che

$y=0$: $\quad f(x,0) = 2x^4 \quad$ $++\ \underset{0}{\bullet}\ ++$

$y=\frac{3}{2}x^2$: $\quad f\left(x,\frac{3}{2}x^2\right) = \left(-\frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{x^4}{4} \quad$ $--\ \underset{0}{\bullet}\ --$

Quindi $(0,0)$ è un punto di SELLA.

5.e $f(x,y)=4-\sqrt{x^2+4y^2}$ Che tipo di punto è $(0,0)$?

Si noti che f non è derivabile in $(0,0)$.

Per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y)=4-\underbrace{\sqrt{x^2+4y^2}}_{\geq 0}\leq 4=f(0,0).$$

Quindi $(0,0)$ è un punto di MASSIMO ASSOLUTO.

5.f $f(x,y)=x^4e^{xy}(x^2+y^2-x-1)$ Che tipo di punto è $(0,0)$?

Si ha che $f(0,0)=0$. Inoltre,

$$f(x,y)=\underbrace{x^4e^{xy}}_{\geq 0}\underbrace{(x^2+y^2-x-1)}_{\to -1 \text{ per } (x,y)\to(0,0)}\leq 0=f(0,0) \text{ in un intorno di } (0,0)$$

quindi è <0 in un intorno di $(0,0)$

Quindi $(0,0)$ è un punto di MASSIMO RELATIVO.

5.g $f(x,y)=\log(1+x^2+y^2)-3xy$. Che tipo di punto è $(0,0)$?

Per $(x,y)\to(0,0)$

$$f(x,y)=x^2+y^2+o(x^2+y^2)-3xy$$
$$=\frac{1}{2}\langle H_f(0,0)(x,y),(x,y)\rangle+o(x^2+y^2)$$

dove $H_f(0,0)=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $\det(H)=4-9<0$ SELLA.

Più in generale se $f(x,y)=\log(1+x^2+y^2)-axy$ con $a\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\nabla f(0,0)=(0,0)$, $H_f(0,0)=\begin{bmatrix}2 & -a\\ -a & 2\end{bmatrix}$

quindi $(0,0)$ è di SELLA se $4-a^2<0$ ossia $|a|>2$ e, visto che $tr(H)=4$, è di MINIMO RELATIVO se $|a|<2$.

Nel caso "critico" $a=2$ (simile per $a=-2$) si ha che $f(0,0)=0$ e

1) se $y=x$, per $x\to 0$

$$f(x,x)=\log(1+2x^2)-2x^2$$
$$=\cancel{2x^2}-\frac{1}{2}(2x^2)^2+o(x^4)-\cancel{2x^2}$$
$$=-2x^4(1+o(1))$$

$- -\ \underset{0}{\bullet}\ - -$ in un intorno di 0

2) se $y=0$, $f(x,0)=\log(1+x^2)$ $\quad + +\ \underset{0}{\bullet}\ + +$

Quindi $(0,0)$ è un punto di SELLA anche per $a=2$.

$\boxed{5.R}$ $f(x,y)=(1-\cos(x^2+y^2))\,\mathrm{sen}(x-y^2)$ Che tipo di punto è $(0,0)$?

Per $(x,y)\to(0,0)$,

$$f(x,y)=(\cancel{1}-(\cancel{1}+o(x^2+y^2))(x-y^2+o(x^2+y^2))$$
$$=o(x^2+y^2)$$

da cui $f(0,0)=0$, $\nabla f(0,0)=(0,0)$, $H_f(0,0)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$. $H=0$

Notiamo che $(1-\cos(x^2+y^2))\geq 0$ mentre $\mathrm{sen}(x-y^2)$ cambia segno in ogni intorno di $(0,0)$.

In particolare, restringendo f a $y=0$ si ha

$$f(x,0)=(1-\cos(x^2))\,\mathrm{sen}(x)$$

$- -\ \underset{0}{\bullet}\ + +$ in un intorno di 0

Quindi $(0,0)$ è un punto di SELLA.