ANALISI MATEMATICA 2 - FOGLIO 1

1.a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{k^{1+\frac{1}{k}}}_{\to 0^+}}$ DIVERGE A $+\infty$

$$\frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}} = \frac{1}{k\underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\to 1}} \sim \frac{1}{k}$$

Per il confronto asintotico dato che $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty$ anche la serie data diverge.

1.b $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\operatorname{sen}(\cos(k))\right)^k$ CONVERGE

Dato che $|\operatorname{sen}(\cos(k))| \leq \operatorname{sen}(\overset{|\cos(k)|\leq 1}{1}) < 1$, per confronto con la serie geometrica $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(\operatorname{sen}(1))^k$ che è convergente, la serie data è assolutamente convergente e quindi anche convergente.

1.c $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \cos(\pi k)\operatorname{arctg}(e^{-k})$ CONVERGE

Abbiamo che $\cos(\pi k) = (-1)^k$ e $\operatorname{arctg}(e^{-k})$ decresce a 0 (si noti che $\operatorname{arctg}(x)$ è crescente e e^{-x} è decrescente) e dunque la serie converge per Leibniz.

1.d $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\log(k^2+1)}$ DIVERGE A $+\infty$

$$\frac{1}{k\log(k^2+1)} \sim \frac{1}{k\log(k^2)} = \frac{1}{2k\log(k)}$$

Dato che $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\log(k)} = +\infty$ $(\alpha = 1$ e $\beta = 1)$ per confronto asintotico anche la serie data diverge a $+\infty$.

$\boxed{1.e}$ $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(k))^{\log(k)}}$ CONVERGE

Notiamo che

$$a^b = \exp(b\log(a))$$

$$(\log(k))^{\log(k)} = \exp(\log(k)\cdot \underbrace{\log(\log(k))}_{\to +\infty})$$

mentre $k^\alpha = \exp(\alpha \log(k))$. Quindi

α: numero fissato

$$\frac{a_k}{1/k^2} = \frac{k^2}{\log(k)^{\log(k)}} = \exp(2\log(k) - \log(k)\log(\log(k))) \to 0.$$

$$= \log(k)(2-\log(\log(k))) \to -\infty$$

Così per il confronto asintotico, dato che $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ converge, anche la serie data converge.

$\boxed{1.f}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2+1}-k}{e^{-k}+\log^2(k)}$ CONVERGE

Abbiamo che

$$\sqrt{1+t} = 1+\frac{t}{2}+o(t)$$

$$\frac{\sqrt{k^2+1}-k}{e^{-k}+\log^2(k)} = \frac{k\left(\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}-1\right)}{\log^2(k)\left(1+\underbrace{\left(\frac{e^{-k}}{\log^2(k)}\right)}_{\to 0}\right)} \sim \frac{k\cdot\frac{1}{2k^2}}{\log^2(k)} = \frac{1/2}{k\log^2(k)}.$$

Dato che la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\log^2(k)}$ converge, per confronto asintotico converge anche la serie data.

$\boxed{1.g}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^k e^{-k^2}$ CONVERGE

Si ha che $\sqrt[k]{a_k} = k\cdot e^{-k^2/k} = \frac{k}{e^k} \to 0 < 1$ e quindi la serie converge per il criterio della radice.

$\boxed{1.h}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k + \operatorname{sen}(k)}{k^2+1}$ CONVERGE

La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{k}{k^2+1}$ converge per Leibniz perché

$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k^2+1} = 0$ e la funzione $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$ è decrescente

per $t>1$: $\displaystyle f'(t) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} < 0$.

La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k)}{k^2+1}$ converge assolutamente perché

$$\frac{\operatorname{sen}(k)}{k^2+1} \leq \frac{1}{k^2} \quad e \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ converge.}$$

Infine la somma di due serie convergenti è convergente.

$\boxed{1.i}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k^3+1} - \sqrt{k^3-1}\right)$ CONVERGE

$$a_k = \left(\sqrt{k^3+1} - \sqrt{k^3-1}\right) \cdot \frac{\sqrt{k^3+1} + \sqrt{k^3-1}}{\sqrt{k^3+1} + \sqrt{k^3-1}}$$

$$= \frac{\cancel{k^3}+1 - \cancel{k^3}+1}{\sqrt{k^3+1} + \sqrt{k^3-1}} \sim \frac{2}{2k^{3/2}} = \frac{1}{k^{3/2}}$$

Dato che $3/2 > 1$ converge per confronto asintotico

In alternativa

$(1+x)^{1/2} \sim 1 + \frac{x}{2}$ per $x \to 0$

$$a_k = k^{3/2}\left(\left(1+\frac{1}{k^3}\right)^{1/2} - \left(1-\frac{1}{k^3}\right)^{1/2}\right) \sim k^{3/2}\left(\cancel{1} + \frac{1/2}{k^3} - \left(\cancel{1} - \frac{1/2}{k^3}\right)\right)$$

$$\sim k^{3/2} \cdot \frac{1}{k^3} = \frac{1}{k^{3/2}}$$

$\boxed{1.j}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\sqrt{k}}}{k!}$ CONVERGE

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{\sqrt{k+1}}}{\underbrace{\cancel{(k+1)!}}_{k+1}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{k^{\sqrt{k}}} = \frac{1}{k+1} \exp\left(\sqrt{k+1}\log(k+1) - \sqrt{k}\log(k)\right)$$

$\sqrt{k+1}\log(k+1) = \sqrt{k}\sqrt{1+\frac{1}{k}}\left(\log(k) + \log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = \sqrt{k}\log(k) + \underbrace{\frac{\log(k)}{2\sqrt{k}}}_{\to 0}(1+o(1))$

$$= \frac{1}{k+1}\exp(o(1)) \longrightarrow 0 < 1$$

Converge per il criterio del rapporto.

1.k $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k!)}{k^3}$ CONVERGE

Notiamo che

$$\log(k!) = \underbrace{\log(1)}_{\le \log(k)} + \underbrace{\log(2)}_{\le \log(k)} + \dots + \underbrace{\log(k)}_{\le \log(k)} \le k\log(k).$$

Quindi

$$\frac{\log(k!)}{k^3} \le \frac{\cancel{k}^{1}\log(k)}{k^{\cancel{3}\,2}} = \frac{1}{k^2 \log^{-1}(k)} \qquad \alpha=2,\ \beta=-1 \text{ converge!}$$

Per confronto la serie data è convergente.

1.l $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log(k)}}$ DIVERGE A $+\infty$

Si ha che $2^{\log(k)} = \exp(\log(k)\cdot\log(2)) = k^{\log(2)}$

Dato che $\log(2)<1$ allora la serie diverge.

1.m $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ CONVERGE

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{((k+1)\cancel{!})^2}{\underbrace{(2(k+1))!}_{=(2k+2)(2k+1)\cdot(2k)!}} \cdot \frac{\cancel{(2k)!}}{\cancel{(k!)^2}} = \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} \to \frac{1}{4} < 1.$$

La serie data converge per il criterio del rapporto.

1.n $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k+1}{4k+3}\right)^k$ DIVERGE A $+\infty$

$$a_k = \left(\frac{4k+1}{4k+3}\right)^k = \frac{\left(1+\frac{1/4}{k}\right)^k}{\left(1+\frac{3/4}{k}\right)^k} \longrightarrow e^{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{e}} > 0$$

Non vale la condizione necessaria di convergenza in quanto a_k non tende a 0.

$\boxed{1.0}$ $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos^2\left(\frac{1}{k}\right)-\sin^2\left(\frac{2}{k}\right)}{\cos\left(\frac{3}{k}\right)}\right)^{k^3}$$ CONVERGE

Per $k\to\infty$,

$$\frac{\cos^2\left(\frac{1}{k}\right)-\sin^2\left(\frac{2}{k}\right)}{\cos\left(\frac{3}{k}\right)}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)^2-\left(\frac{2}{k}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)^2}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)}$$

$$=\left(1-\frac{2}{2k^2}-\frac{4}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{9}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

$$=1+\left(-5+\frac{9}{2}\right)\frac{1}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)=1-\frac{1}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Così applicando il criterio della radice

$$\sqrt[k]{a_k}=\left(1-\frac{1}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)^{k^3/k}\longrightarrow e^{-1/2}<1$$

quindi la serie è convergente.

$\boxed{2.a}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k^2}{k^5+3}}_{a_k} (\underbrace{2x-1}_{z})^k$ CONVERGE PER $x \in [0,1]$.

Studiamo la serie di potenze $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$.

Centro 0. Raggio di convergenza:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)^2}{(k+1)^5+3} \cdot \frac{k^5+3}{k^2} \sim \frac{k^7}{k^7} = 1 \implies R = \frac{1}{1} = 1.$$

Estremi: per $z = \pm 1$

$$\left|\frac{k^2}{k^5+3}(\pm 1)^k\right| = \frac{k^2}{k^5+3} \sim \frac{1}{k^3} \quad \text{la serie converge.}$$

Quindi la serie converge per $z \in [-1,1]$ ossia per

$$-1 \leq 2x-1 \leq 1 \iff x \in [0,1].$$

$\boxed{2.b}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k^{3x}+k}$ CONVERGE PER $x \in \mathbb{R}$.

Proviamo ad applicare Leibniz.

$a_k \to 0$?

$$0 \leq a_k = \frac{\sqrt{k}}{\underbrace{k^{3x}}_{>0}+k} \leq \frac{\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$$

a_k è definitivamente decrescente?

Basta verificare che $f(k) = k^t + \sqrt{k}$ con $t = 3x - \frac{1}{2}$ è definitivamente crescente

$$f'(k) = t k^{t-1} + \frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{(2tk^{t-\frac{1}{2}}+1)}{\underbrace{2\sqrt{k}}_{>0}} \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} +\infty & \text{se } t > 1/2 \\ 2 & \text{se } t = 1/2 \\ 1 & \text{se } t < 1/2 \end{cases}$$

in ogni caso > 0

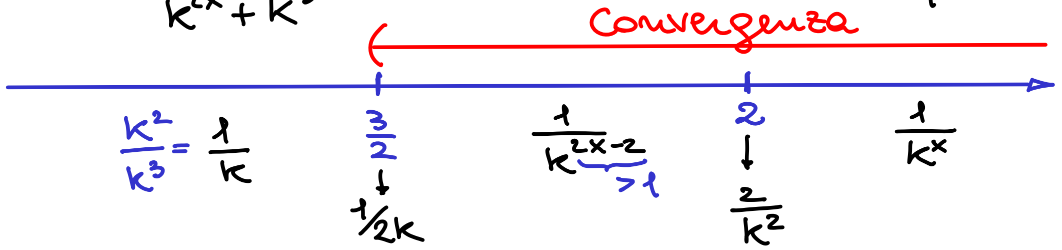
Quindi la serie converge $\forall t \in \mathbb{R}$ ossia $\forall x \in \mathbb{R}$.

2.c $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^x+k^2}{k^{2x}+k^3}$ CONVERGE PER $x>\frac{3}{2}$

Abbiamo che per $k\to\infty$

$$k^x+k^2 \sim \begin{cases} k^x & \text{se } x>2 \\ 2k^2 & \text{se } x=2 \\ k^2 & \text{se } x<2 \end{cases} \qquad k^{2x}+k^3 \sim \begin{cases} k^{2x} & \text{se } x>\frac{3}{2} \\ 2k^3 & \text{se } x=\frac{3}{2} \\ k^3 & \text{se } x<\frac{3}{2} \end{cases}$$

Quindi $\dfrac{k^x+k^2}{k^{2x}+k^3}$ è asintoticamente equivalente a



2.d $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x^{k!}$ CONVERGE PER $x\in(-1,1)$

Per $k\to\infty$,

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|x|^{(k+1)!}}{|x|^{k!}} = |x|^{(k+1)!-k!} = |x|^{k\cdot k!} \to \begin{cases} 0 & \text{se } |x|<1 \\ +\infty & \text{se } |x|>1 \end{cases}$$

$$(k+1)!-k! = (k+1)\cdot k!-k!$$

Quindi per il criterio del rapporto la serie converge assolutamente per $|x|<1$ e non converge per $|x|>1$. Per $x=\pm1$ notiamo che $|x|^{k!}=1 \not\to 0$ e non vale la condizione necessaria di convergenza.

2.e $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k+1}{3^k+2}\left(\frac{x-3}{2}\right)^{2k}$ CONVERGE PER $x\in(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$.

Consideriamo prima la serie di potenze in $z=\left(\frac{x-3}{2}\right)^2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k+1}{3^k+2} z^k.$$

Raggio di convergenza:

$$|a_k|^{1/k} = \left(\frac{4^k+1}{3^k+2}\right)^{1/k} \to \frac{4}{3} \Rightarrow R=\frac{3}{4}.$$

Dato che $\left|\frac{4^k+1}{3^k+2}\cdot\left(\pm\frac{3}{4}\right)^k\right| \to 1 \neq 0$ la serie di potenze converge per $z \in \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

Quindi la serie data converge se e solo se

$$\overset{\text{ovvio}}{-\frac{3}{4} <} \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 < \frac{3}{4} \iff (x-3)^2 < 3 \iff -\sqrt{3} < x-3 < \sqrt{3}$$

ossia $x \in (3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$.

$\boxed{2.f}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(3x)^k}$ CONVERGE PER $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

Intanto osserviamo che per $x \neq -\frac{1}{3}$ (per $x = -\frac{1}{3}$ il denominatore è 0 per k dispari) si ha

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+(3x)^k} = \begin{cases} 1 & \text{se } |3x|<1 \\ 1/2 & \text{se } 3x=1 \\ 0 & \text{se } |3x|>1 \end{cases}$$

Quindi per la convergenza è necessario che $|3x|>1$.

In tal caso

$$\left|\frac{1}{1+(3x)^k}\right| = \left|\frac{1}{3x}\right|^k \cdot \frac{1}{\underbrace{\left|\left(\frac{1}{3x}\right)^k+1\right|}_{\to 1}} \sim \left|\frac{1}{3x}\right|^k$$

e dunque la serie è assolutamente convergente perché asintoticamente equivalente ad una serie geometrica di ragione $\left|\frac{1}{3x}\right| < 1$.

$\boxed{3.a}$ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\cdot 4^k - 2\cdot 5^k}{20^{k-1}} = \frac{5}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\cdot 4^k - 2\cdot 5^k}{20^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(3\cdot 4\cdot\left(\frac{4}{20}\right)^{k-1} - 2\cdot 5\left(\frac{5}{20}\right)^{k-1}\right)$$

$$= 12\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1} - 10\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

$$\overset{\uparrow}{=} \frac{12}{1-\frac{1}{5}} - \frac{10}{1-\frac{1}{4}} = 15 - \frac{40}{3} = \frac{5}{3}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x} \quad \text{per } |x|<1$$

$\boxed{3.b}$ $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2+8k+3} = \frac{1}{6}$$

Abbiamo che $\dfrac{1}{4k^2+8k+3} = \dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \dfrac{1/2}{2k+1} - \dfrac{1/2}{2k+3}$.

Così la somma parziale è uguale a

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{2n+1}} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{6}.$$

$\boxed{3.c}$ $$\sum_{k=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = -\log(2)$$

Abbiamo che $\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \log\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \log\left(\frac{k-1}{k}\right) - \log\left(\frac{k}{k+1}\right)$ $\quad (k-1)(k+1)$

Così la somma parziale è uguale a

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\log\left(\frac{k-1}{k}\right) - \log\left(\frac{k}{k+1}\right)\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{2}\right) - \cancel{\log\left(\frac{2}{3}\right)} + \cancel{\log\left(\frac{2}{3}\right)} - \cancel{\log\left(\frac{3}{4}\right)} + \cdots + \cancel{\log\left(\frac{n-1}{n}\right)} - \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log(2).$$

$\boxed{3.d}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k+k}{(k+1)!} = \frac{e^3-1}{3}$$

Ricordando che $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k+k}{(k+1)!} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1-1}{(k+1)!}$$

$$\overset{j=k+1}{=} \frac{1}{3} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{3^j}{j!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{k+1}^{\,1}}{\cancel{(k+1)!}_{\,k!}} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!}$$

$$= \frac{1}{3}(e^3-1-3) + (\cancel{e}-\cancel{1}) - (\cancel{e}-\cancel{1}-1)$$

$$= \frac{1}{3}(e^3-4)+1 = \frac{e^3-1}{3}.$$

$\boxed{3.e}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{k!} = 5e$$

Ricordando che $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ derivando termine a termine si ha che

$$xe^x = xD(e^x) = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^k}{k!} \overset{x=1}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} = e.$$

Analogamente

$$x^2e^x = x^2D^2(e^x) = x^2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)x^{k-2}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^k}{k!}$$

da cui

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2x^k}{k!} = x^2e^x + xe^x = (x^2+x)e^x \overset{x=1}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = 2e.$$

Così

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{k!}_{\,(k-1)!}} \overset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)^2}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^2}{j!} + 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$$

$$= 2e+2e+e = 5e.$$

$\boxed{3.f}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k} = \frac{3}{2}$

Ricordando che per $|x|<1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ derivando termine a termine si ha che

$$D\Big(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = D\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

e

$$D\Big(\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}\Big) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) x^{k-2} = D\Big(\frac{1}{(1-x)^2}\Big) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k &= \sum_{k=1}^{\infty} \big(k(k-1)+k\big) x^k \\ &= x^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} \\ &= x^2 \cdot \frac{2}{(1-x)^3} + x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2x^2+x-x^2}{(1-x)^3} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

Infine ponendo $x = \frac{1}{3}$ si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k} = \frac{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{3+9}{8} = \frac{3}{2}.$$