

Esercizio 1. Sia la funzione $f(x, y) = (4 - x^2 - y^2)e^{y-x}$.

(a) Determinare i punti stazionari di f stabilendo per ciascuno di essi se si tratta di un punto di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.

(b) f è superiormente limitata in $\mathbb{R}^2$? f è inferiormente limitata in $\mathbb{R}^2$?

(a) Punti stazionari in $D = \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} f_x = e^{y-x}(x^2 + y^2 - 2x - 4) = 0 \\ f_y = e^{y-x}(-x^2 - y^2 - 2y + 4) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x + 4 \\ x^2 + y^2 = -2y + 4 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2x + 4 = -2y + 4 \rightarrow x = -y \\ (-y)^2 + y^2 = -2y + 4 \rightarrow y^2 + y - 2 = (y-1)(y+2) = 0 \end{cases} \iff (-1, 1) \text{ e } (2, -2).$$

Matrice Hessiana:

$$H_f(x, y) = e^{y-x} \begin{bmatrix} 2 + 4x - x^2 - y^2 & x^2 + y^2 - 2x + 2y + 4 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y + 4 & 2 - 4y - x^2 - y^2 \end{bmatrix}.$$

Allora

$$H_f(-1, 1) = e^2 \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \det(H_f) = 12e^4 > 0 \\ \text{tr}(H_f) = -8e^2 < 0 \end{matrix} \Rightarrow (-1, 1) \text{ è un MASSIMO RELATIVO}$$

$$H_f(2, -2) = e^{-4} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(H_f) = -12e^{-8} < 0 \Rightarrow (2, -2) \text{ è un punto di SELLA}$$

(b) f non è inferiormente limitata perché
per $y \rightarrow +\infty$, $f(0, y) = (4 - y^2)e^y \rightarrow -\infty$.

f è superiormente limitata perché f è continua e $f \geq 0$ nell'insieme compatto $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ e dunque per il teorema di Weierstrass ammette un punto di massimo assoluto.

Esercizio 2. Sia il solido

$$D = \left\{ (x, y, z) : x^2 \leq (4 - y^2) \left(1 - \frac{z}{3}\right)^2, 0 \leq z \leq 3, x \geq 0, y \geq 0 \right\}.$$

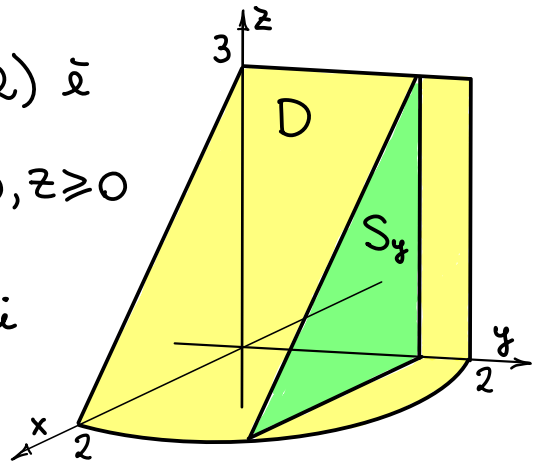
(a) Fare un disegno del solido D e calcolarne il volume.

(b) Determinare la coordinata y del baricentro di D .

(a) La sezione S_y di D per $y \in [0, 2)$ è

data da $\frac{x}{\sqrt{4-y^2}} + \frac{z}{3} \leq 1$ con $x \geq 0, z \geq 0$

ossia un triangolo rettangolo di cateti $\sqrt{4-y^2}$ e 3. Allora



$$|D| = \int_0^2 |S_y| dy = \int_0^2 \frac{1}{2} 3 \sqrt{4-y^2} dy = \frac{3}{2} \int_0^2 \sqrt{4-y^2} dy = \frac{3\pi}{2}.$$

↑ area quarto di cerchio di raggio 2

(b) Abbiamo che

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{|D|} \iiint_D y \, dx \, dy \, dz = \frac{2}{3\pi} \int_0^2 y |S_y| dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^2 y \sqrt{4-y^2} dy = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{3} (4-y^2)^{3/2} \right]_0^2 = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Per $T > 0$, sia γ_T la curva data in forma polare come

$$r(\theta) = 2\theta \sin(\theta) \quad \text{con } \theta \in [0, T].$$

(a) Calcolare l'area della parte di piano delimitata dalla curva chiusa γ_π .

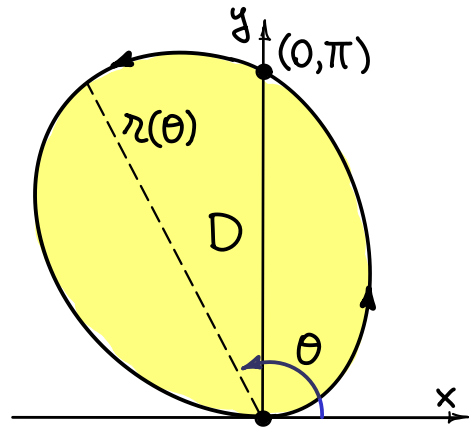
(b) Scegliere dei valori reali per a, b, c e d , tutti non nulli, tali che

$$\int_{\gamma_{\pi/2}} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle = 1$$

dove $\mathbf{F}(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad |D| &= \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi 4\theta^2 \sin^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$



$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi \theta^2 (1 - \cos 2\theta) d\theta = \left[\frac{\theta^3}{3} \right]_0^\pi - \left[\theta^2 \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \theta \sin 2\theta d\theta \\ &= \frac{\pi^3}{3} - 0 + \left[-\theta \frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(b) $\vec{F} = (ax + by, cx + dy)$ è conservativo in $\mathbb{R}^2$ se e solo se

$$c = \frac{\partial}{\partial x}(cx + dy) = \frac{\partial}{\partial y}(ax + by) = b$$

e in tal caso $\vec{F} = \nabla U$ dove

$$U(x, y) = \frac{ax^2}{2} + bxy + \frac{dy^2}{2}.$$

Quindi

$$1 \stackrel{?}{=} \int_{\gamma_{\pi/2}} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = U(0, \pi) - U(0, 0) = \frac{d\pi^2}{2}.$$

Così una possibile scelta di a, b, c e d non nulli è

$$a = b = c = 1 \quad \text{e} \quad d = \frac{2}{\pi^2}.$$

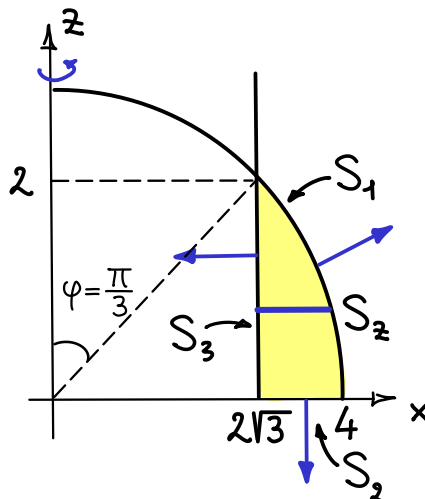
Esercizio 4. Sia $\mathbf{F} = (y + 1, x, 3z - 1)$ e il solido

$$D = \{(x, y, z) : 12 \leq x^2 + y^2 \leq 16 - z^2, z \geq 0\}.$$

(a) Determinare il flusso $\iint_{\partial^+ D} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ utilizzando il teorema della divergenza.

(b) Confermare il valore del flusso ottenuto in (a) con un calcolo diretto.

$$\begin{aligned} (a) \quad \iint_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &\stackrel{TD}{=} \iiint_D \underbrace{\operatorname{div}(\vec{F})}_3 dx dy dz \\ &= 3|D| = 3 \int_0^2 |S_z| dz \quad \begin{array}{l} \text{anello di raggi} \\ 2\sqrt{3} \text{ e } \sqrt{16-z^2} \end{array} \\ &= 3 \int_0^2 \pi((16-z^2)-12) dz \\ &= 3\pi \left[4z - \frac{z^3}{3} \right]_0^2 = 16\pi. \end{aligned}$$



(b) $\partial^+ D = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ e quindi:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial^+ D} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle + \iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle + \iint_{S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \\ &= 12\pi + 4\pi + 0 = 16\pi \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iint_{S_1} \langle (y+1, x, 3z-1), \frac{(x, y, z)}{4} \rangle dS \\ &= \frac{1}{4} \iint_{S_1} ((2xy+y) + 3z^2 - z) dS \quad \begin{array}{l} \text{y-dispari} \\ \text{simili y=0} \end{array} \\ &\stackrel{CS}{=} \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} (3(4\cos\varphi)^2 - 4\cos\varphi) 4^2 \sin\varphi d\varphi d\theta \\ &= 8\pi \left[-16(\cos\varphi)^3 + 2(\cos\varphi)^2 \right]_{\pi/3}^{\pi/2} \\ &= 8\pi \left(\frac{16}{8} - \frac{2}{4} \right) = 12\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iint_{S_2} \langle (*, *, -1), (0, 0, -1) \rangle dS \\ &= |S_2| = \pi(16-12) = 4\pi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iint_{S_3} \langle (y+1, x, *), -\frac{(x, y, 0)}{2\sqrt{3}} \rangle dS \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \iint_{S_3} (2xy + y) dS = 0.\end{aligned}$$

$\swarrow$ y -disposi
 $\nwarrow$ x immer $y=0$