

Esercizio 1. Sia la funzione

$$f(x, y) = \frac{\log(x^2 y^2)}{\log(x + y)}.$$

(a) Determinare se il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ esiste e nel caso calcolarlo.

(b) Calcolare il valore massimo e il valore minimo di f nell'insieme ∂D dove

$$D = \{(x, y) : xy \geq 1, 0 < x + y \leq 4\}.$$

(a) Il limite in $(0,0)$ non esiste.

Se $m > 0$, $x=t$ e $y=mt$, per $t \rightarrow 0^+$

$$f(x, y) = \frac{2 \log(mt^2)}{\log((1+m)t)} = \frac{2 \log(m) + 4 \log(t)}{\log(1+m) + \log(t)} \rightarrow 4$$

Se $x=t$ e $y=t^2$, per $t \rightarrow 0^+$

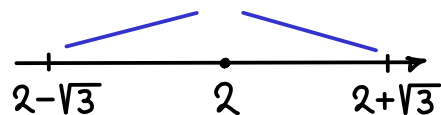
$$f(x, y) = \frac{2 \log(t^3)}{\log(t+t^2)} \sim \frac{6 \log(t)}{\log(t)} \rightarrow 6$$

diversi

(b) $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ con $\Gamma_1 = \{(x, y) : xy = 1, x \in [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]\}$
dove f è costante e uguale a 0, mentre

$\Gamma_2 = \{(x, y) : y = 4-x, x \in [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]\}$ dove la restrizione di f è

$$h(x) = f(x, 4-x) = \frac{2 \log(x(4-x))}{\log(4)}$$



Così il valore massimo di f in ∂D è $f(2, 2) = h(2) = 2$
mentre il valore minimo è 0.

Esercizio 2. Si consideri il sistema:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + 2xz \\ x^2 + z^2 = 4 - 2xy \end{cases}$$

- (a) Verificare che in un intorno del punto $(0, 1, 2)$ il sistema definisce implicitamente due funzioni $y = \varphi(x)$ e $z = \psi(x)$ e calcolare $\varphi''(0)$ e $\psi''(0)$.
- (b) Sia C l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che soddisfano il sistema e sia r la retta tangente a C in $(0, 1, 2)$. Determinare il punto di intersezione della retta r con il piano $x + y + 2z = 1$.

(a) Il sistema dato è

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2xz - 1 \\ g(x, y, z) = x^2 + z^2 + 2xy - 4 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{bmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & -2x \\ 2x & 2z \end{bmatrix} \xrightarrow{(0,1,2)} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} 8 \neq 0.$$

Per il teorema delle funzioni implicite per sistemi

$\exists y = \varphi(x)$ e $z = \psi(x)$ C^2 tali che $\varphi(0) = 1$, $\psi(0) = 2$ e risolvono il sistema in un intorno di $x = 0$.

Derivando due volte le equazioni rispetto a x si ha

$$\begin{cases} 2x + 2\varphi\varphi' = 2\psi + 2x\psi' \\ 2x + 2\psi\psi' = -2\varphi - 2x\varphi' \end{cases} \xrightarrow{x=0} \begin{cases} 2\varphi' = 4 \\ 4\psi' = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi'(0) = 2 \\ \psi'(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 2 + 2(\varphi')^2 + 2\varphi\varphi'' = 4\psi' + 2x\psi'' \\ 2 + 2(\psi')^2 + 2\psi\psi'' = -4\varphi' - 2x\varphi'' \end{cases} \xrightarrow{x=0} \begin{cases} 2 + 8 + 2\varphi'' = -2 \\ 2 + \frac{1}{2} + 4\psi'' = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi''(0) = -6 \\ \psi''(0) = -\frac{21}{8} \end{cases}$$

(b) Per (a), in un intorno di $(0, 1, 2)$, la curva C è data da $t \rightarrow (t, \varphi(t), \psi(t))$. Quindi la retta r tangente in $(0, 1, 2)$ in forma parametrica è

$$t \rightarrow (0, 1, 2) + (1, \varphi'(0), \psi'(0)) \cdot t = (t, 1 + 2t, 2 - \frac{t}{2}).$$

L'intersezione di r con il piano dato è

$$1 = x + y + 2z = \cancel{t} + 1 + 2t + 4 - \cancel{t} \Rightarrow 1 = 2t + 5 \Rightarrow t = -2$$

da cui otteniamo il punto $(-2, -3, 3)$.

Esercizio 3. Sia γ la curva da $(2, 0)$ a $(0, 0)$, contenuta nel primo quadrante e che soddisfa l'equazione $4x^2 + y^2 = 8x$.

(a) Calcolare $\int_{\gamma} \frac{y}{(16(x-1)^2 + y^2)^{3/2}} ds$.

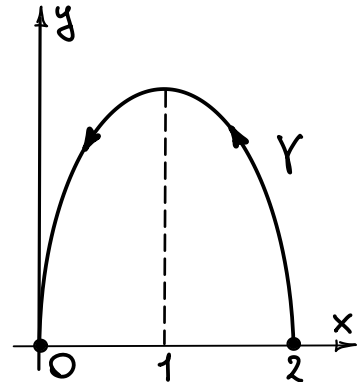
(b) Calcolare $\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle$ dove $\mathbf{F}(x, y) = (e^y + y(e^x + y), e^x + x(e^y - 1))$.

(a) La curva data è la semiellisse

$$(x-1)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{con } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0.$$

In forma parametrica è

$$\vec{\gamma}(t) = (1 + \cos t, 2 \sin t) \quad t \in [0, \pi].$$



Così $\vec{\gamma}'(t) = (-\sin t, 2 \cos t)$ e

$$\int_{\gamma} \frac{y}{(16(x-1)^2 + y^2)^{3/2}} ds = \int_0^{\pi} \frac{2 \sin t}{\underbrace{(16(\cos t)^2 + 4(\sin t)^2)^{3/2}}_{8(4(\cos t)^2 + (\sin t)^2)^{3/2}}} \cdot ((\sin t)^2 + 4(\cos t)^2)^{1/2} dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\underbrace{4(\cos t)^2 + (\sin t)^2}_{1 + 3(\cos t)^2}} dt \quad \uparrow \quad \frac{1}{4\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\arctg(u) \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

(b) Si ha che $\vec{F} = \nabla \left(\overbrace{x e^y + y e^x}^{U(x,y)} \right) + (y^2, -x)$ e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle &= U(0,0) - U(2,0) + \int_{\gamma} \langle (y^2, -x), d\vec{s} \rangle \\ &= -2 + \int_0^{\pi} \langle (4(\sin t)^2, -1 - \cos t), (-\sin t, 2 \cos t) \rangle dt \\ &= -2 + \int_0^{\pi} (-4 \sin t + 4 \cos^2 t \sin t - 2 \cos t - 2 \cos^2 t) dt \\ &= -2 + \left[4 \cos t - \frac{4}{3} \cos^3 t - 2 \sin t \right]_0^{\pi} - 2 \frac{\pi}{2} = -\frac{22}{3} - \pi. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Sia il solido

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 3z \leq \sqrt{3x^2 + 3y^2}\}$$

e sia S la superficie data dal bordo di D . La superficie S è orientata verso l'esterno.

(a) Calcolare le coordinate del baricentro di D .

(b) Sia $\mathbf{F} = (x, x, z)$. Calcolare i flussi $\iint_{S_1} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ e $\iint_{S_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ dove

$$S_1 = S \cap \{(x, y, z) : 3z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}\} \quad \text{e} \quad S_2 = S \cap \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

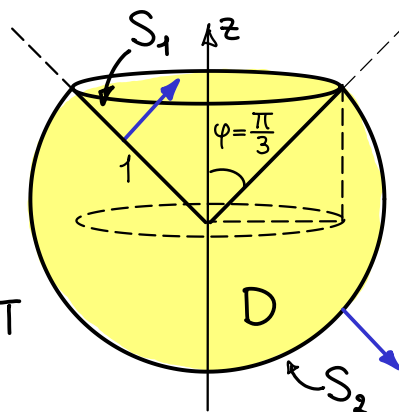
(a) In coordinate sferiche

$$\cos \varphi = z \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \varphi \geq \sqrt{3} \\ \varphi \geq \frac{\pi}{3}$$

Così

$$|D| \stackrel{CS}{=} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \frac{2\pi}{3} [-\cos \varphi]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \pi$$

$$\bar{z} = \frac{1}{|D|} \iiint_D z \, dx \, dy \, dz \stackrel{CS}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \rho^3 \cos \varphi \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{4} \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = -\frac{3}{16}.$$



(b) S_1 superficie conica: $\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{3}})$ con

$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}\}$. Allora $\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = (\frac{-x}{\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}}, 1)$ e

$$\iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_A \left(\frac{-x^2}{\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x y}{\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{3}} \right) dx \, dy$$

$$\stackrel{CC}{=} \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (-\rho \cos^2 \theta + \rho) \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[(-\pi + 2\pi) \frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{8}.$$

Per S_2 possiamo applicare il teorema della divergenza

$$\iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \stackrel{TD}{=} \iiint_D \underbrace{\text{div}(\vec{F})}_2 \, dx \, dy \, dz - \iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \\ = 2|D| - \frac{\pi}{8} = 2\pi - \frac{\pi}{8} = \frac{15\pi}{8}.$$