

Cognome:
Nome:
Orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
Totale	

Esercizio 1. Sia la funzione

$$f(x, y) = \frac{\log(x^2 y^2)}{\log(x + y)}.$$

(a) Determinare se il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ esiste e nel caso calcolarlo.

(b) Calcolare il valore massimo e il valore minimo di f nell'insieme ∂D dove

$$D = \{(x, y) : xy \geq 1, 0 < x + y \leq 4\}.$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + 2xz \\ x^2 + z^2 = 4 - 2xy \end{cases}.$$

(a) Verificare che in un intorno del punto $(0, 1, 2)$ il sistema definisce implicitamente due funzioni $y = \varphi(x)$ e $z = \psi(x)$ e calcolare $\varphi''(0)$ e $\psi''(0)$.

(b) Sia C l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che soddisfano il sistema e sia r la retta tangente a C in $(0, 1, 2)$. Determinare il punto di intersezione della retta r con il piano $x + y + 2z = 1$.

Esercizio 3. Sia γ la curva da $(2, 0)$ a $(0, 0)$, contenuta nel primo quadrante e che soddisfa l'equazione $4x^2 + y^2 = 8x$.

(a) Calcolare $\int_{\gamma} \frac{y}{(16(x-1)^2 + y^2)^{3/2}} ds$.

(b) Calcolare $\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle$ dove $\mathbf{F}(x, y) = (e^y + y(e^x + y), e^x + x(e^y - 1))$.

Esercizio 4. Sia il solido

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 3z \leq \sqrt{3x^2 + 3y^2}\}$$

e sia S la superficie data dal bordo di D . La superficie S è orientata verso l'esterno.

(a) Calcolare le coordinate del baricentro di D .

(b) Sia $\mathbf{F} = (x, x, z)$. Calcolare i flussi $\iint_{S_1} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ e $\iint_{S_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ dove

$$S_1 = S \cap \{(x, y, z) : 3z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}\} \quad \text{e} \quad S_2 = S \cap \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$