Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica

Soluzione della prova scritta del 13-2-2026

Esercizio 1. Sia $f(x,y) = x^2 + 2x\log(5-y^2)$.

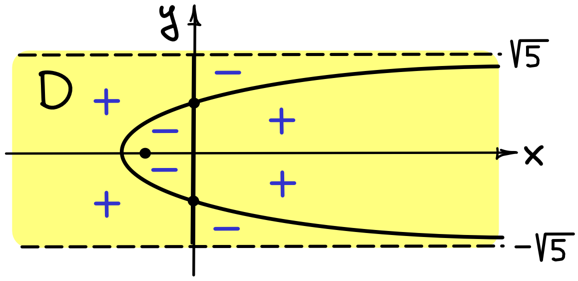
(a) Disegnare il dominio D di f e la curva di livello $f = 0$.

(b) Per ogni $(x_0, y_0) \in \partial D$, determinare se il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ esiste e nel caso calcolarlo.

(c) Trovare tutti i punti stazionari di f stabilendo per ciascuno di essi se si tratta di un punto di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.

(a) $D = \{(x,y) : \underbrace{-\sqrt{5} < y < \sqrt{5}}_{5-y^2>0}\}$

$f = 0 \iff x = 0 \lor x = -2\log(5-y^2)$



(b) Sia $(x_0,y_0) \in \partial D = \{(x,y) : y = \sqrt{5} \lor y = -\sqrt{5}\}$

Se $x_0 \neq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,\pm\sqrt{5})} \left(x^2 + 2x\overbrace{\log(5-y^2)}^{\to -\infty}\right) = \begin{cases} -\infty & \text{se } x_0 > 0 \\ +\infty & \text{se } x_0 < 0 \end{cases}$$

Il limite non esiste in $(0, \pm\sqrt{5})$:

$x = 0$ e $y \to \pm\sqrt{5} \implies x^2 + 2x\log(5-y^2) = 0 \to 0$

per $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \pm\sqrt{5-e^{-n}}$ e $n \to \infty$

$\implies x_n^2 + 2x_n\log(5-y_n^2) = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}(-n) \to -2$

diversi

(c) Punti stazionari:

$$\nabla f(x,y) = \left(2x + 2\log(5-y^2), \frac{4xy}{y^2-5}\right) = (0,0) \implies \begin{matrix}(0,2), (0,-2) \\ (-\log(5), 0)\end{matrix}$$

$\frac{4xy}{y^2-5} = 0$: $x = 0 \lor y = 0$

e

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & \frac{4y}{y^2-5} \\ \frac{4y}{y^2-5} & \frac{4x(y^2-5) - 8xy^2}{(y^2-5)^2} \end{bmatrix}.$$

Allora

$$H_f(0,\pm 2) = \begin{bmatrix} 2 & \mp 8 \\ \mp 8 & 0 \end{bmatrix} \implies \det(H_f) = -64 < 0$$

$(0,2)$ e $(0,-2)$ sono punti di SELLA

$$H_f(-\log(5), 0) = \begin{bmatrix} 2^{>0} & 0 \\ 0 & \underbrace{\tfrac{4}{5}\log(5)}_{>0} \end{bmatrix} \implies$$

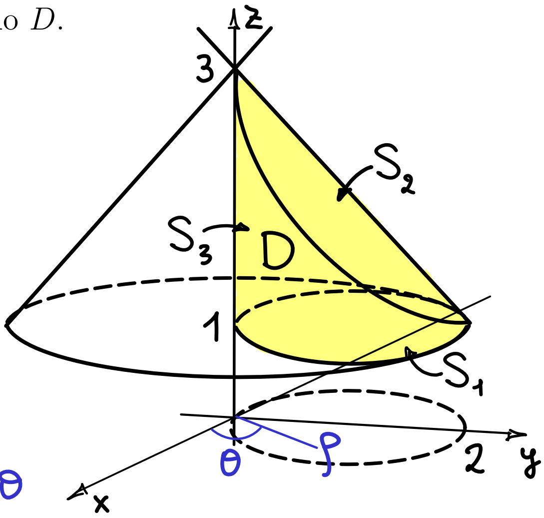
$(-\log(5), 0)$ è un punto di MINIMO RELATIVO

Esercizio 2. Sia

$$D = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le (z-3)^2, x^2+y^2 \le 2y,\ z \in [1,3]\right\}.$$

(a) Calcolare il volume del solido D.

(b) Calcolare l'area della superficie S data dal bordo del solido D.



$$\text{(a)}\ |D| \overset{CC}{=} \int_0^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta}\left(\int_1^{3-\rho} dz\right)\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta}(2-\rho)\rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi}\left[\rho^2 - \frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta - \frac{8}{3}\int_0^{\pi}\overbrace{\operatorname{sen}^3\theta}^{(1-\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$$

$$= 2\pi - \frac{8}{3}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} = 2\pi - \frac{32}{9}.$$

(b) S_1 cerchio $|S_1| = \pi$.

S_2 superficie conica $f(x,y) = 3 - \sqrt{x^2+y^2}$

$$|S_2| = \iint_{S_1}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dS = \iint_{S_1}\sqrt{2}\, dS = \sqrt{2}\,|S_1| = \sqrt{2}\,\pi.$$

S_3 superficie cilindrica

$$|S_3| = 2\int_{\gamma}\left(3 - \sqrt{x^2+y^2} - 1\right) ds \quad \text{con } \vec{\gamma}(t) = (\cos t, 1+\operatorname{sen} t)\, dt$$

$$\boxed{t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2 - \sqrt{2+2\operatorname{sen} t}\right) dt = 4\pi - 2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\operatorname{sen} t}}\, dt$$

$$= 4\pi - 2\sqrt{2}\left[-2\sqrt{1-\operatorname{sen} t}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi - 8.$$

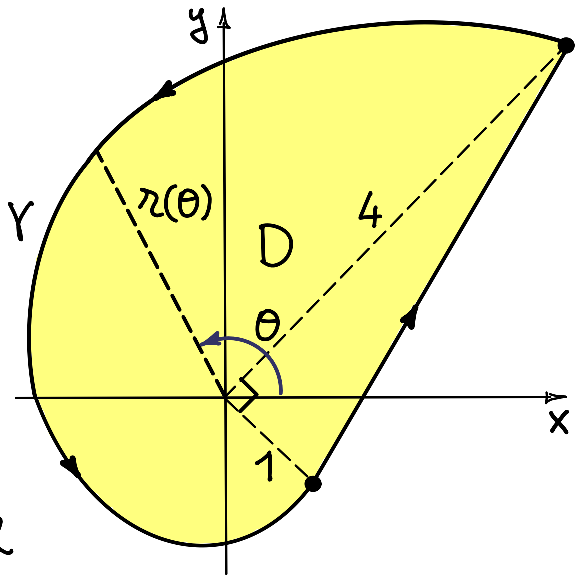
Così

$$|S| = |S_1| + |S_2| + |S_3| = 5\pi + \sqrt{2}\,\pi - 8.$$

Esercizio 3. Sia γ la curva data in forma polare come $r(\theta) = \dfrac{8\pi}{\pi + 4\theta}$ con $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$.

(a) Calcolare l'area della parte di piano delimitata da γ e dal segmento che unisce il punto iniziale e il punto finale di γ.

(b) Scegliere dei valori reali per a, b, c e d, non tutti nulli, tali che $\displaystyle\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle = 0$ dove $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\dfrac{ax+by}{x^2+y^2}, \dfrac{cx+dy}{x^2+y^2}\right)$.



$$\text{(a)}\quad |D| = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{7\pi/4} r^2(\theta)\,d\theta + \frac{1}{2}\,\overbrace{r(\pi/4)}^{4}\cdot\overbrace{r(7\pi/4)}^{1}$$

triangolo rettangolo

$$= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{7\pi/4} \frac{64}{\left(1+\frac{4\theta}{\pi}\right)^2}\,d\theta + 2$$

$t = \frac{4\theta}{\pi}$

$$= 8\pi \int_1^7 \frac{dt}{(1+t)^2} + 2 = 8\pi\left[\frac{-1}{1+t}\right]_1^7 + 2$$

$$= 8\pi\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right) + 2 = 3\pi + 2.$$

(b) Ponendo $d=a$ e $c=-b$ si ha

$$\vec{F} = a\nabla\left(\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right) - b\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

e quindi

vedi LEZ.26

$$0 = \int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = a\left(\log(1) - \log(4)\right) - b\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -a\,2\log(2) - b\,\frac{3\pi}{2}.$$

Così una possibile scelta è

$$a = d = 3\pi \quad\text{e}\quad b = -c = -4\log(2).$$

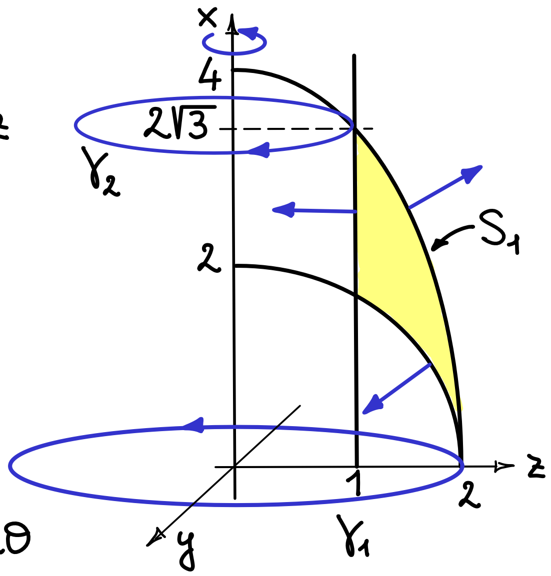
Esercizio 4. Sia il campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(\frac{x^2}{\sqrt{y^2+z^2}}, -2z, y+z^2\right)$ e sia il solido

$$D = \{(x,y,z) : x^2+4y^2+4z^2 \le 16,\ x^2+y^2+z^2 \ge 4, y^2+z^2 \ge 1,\ x \ge 0\}$$

con il bordo $S = \partial D$ orientato verso l'esterno.

(a) Calcolare $\iint_S \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S}\rangle$.

(b) Calcolare $\iint_{S_1} \langle \mathrm{rot}(\boldsymbol{F}), d\boldsymbol{S}\rangle$ dove $S_1 = S \cap \{(x,y,z) : x^2+4y^2+4z^2 = 16\}$.



(a) $$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle \overset{TD}{=} \iiint_D \mathrm{div}(\vec{F})\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_D \left(\frac{2x}{\sqrt{y^2+z^2}} + 2z\right) dx\,dy\,dz$$

D ← simm z=0 ; 2z ← z-dispari

$$\overset{CC}{=} \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(\int_{x=\sqrt{4-\rho^2}}^{2\sqrt{4-\rho^2}} \frac{2x}{\cancel{\rho}}\,dx\right)\cancel{\rho}\,d\rho\,d\theta$$

$$= 2\pi\int_1^2 \left[x^2\right]_{\sqrt{4-\rho^2}}^{2\sqrt{4-\rho^2}} d\rho = 2\pi\int_1^2 3(4-\rho^2)\,d\rho = 2\pi\left[12\rho-\rho^3\right]_1^2 = 10\pi.$$

(b) Il bordo di S_1 è costituito dalle circonferenze γ_1 e γ_2 con l'orientazione indicata in figura:

$$\vec{\gamma}_1(t) = (0, 2\cos t, 2\sin t) \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

$$\vec{\gamma}_2(t) = (2\sqrt{3}, \cos t, \sin t) \text{ con } t \in [2\pi, 0].$$

Allora

$$\iint_{S_1} \langle \mathrm{rot}(\vec{F}), d\vec{S}\rangle \overset{TR}{=} \int_{\gamma_1\cup\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = 12\pi - 3\pi = 9\pi$$

dove in $\vec{F}$ possiamo omettere la parte conservativa $(0,0,z^2)$,

$$\int_{\gamma_1} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_0^{2\pi} \langle (0, -4\,\mathrm{sen}\,t, 2\cos t), (0, -2\,\mathrm{sen}\,t, 2\cos t) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (8\,\mathrm{sen}^2 t + 4\cos^2 t)\, dt = 12\pi$$

e

$$\int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_{2\pi}^{0} \langle (12, -2\,\mathrm{sen}\,t, \cos t), (0, -\mathrm{sen}\,t, \cos t) \rangle \, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} (2\,\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt = -3\pi.$$