Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 23-1-2026

Esercizio 1. Determinare se i seguenti limiti esistono e nel caso calcolarli:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)-y^2}{x\cos(x)-\sin(y^2)}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+xy\log(x^2+y^2)+|y|}{\sqrt{|x|+|y|+1}-1}$

(a) Il limite non esiste.

Lungo la retta $x=0$: per $y\to 0$, $\dfrac{0-y^2}{0-\operatorname{sen}(y^2)} \to 1$

diversi

Lungo la parabola $x=y^2$, per $x\to 0$

$$\frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)} = \frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x(\cancel{1}-\frac{x^2}{2}+o(x^2))-(\cancel{x}-\frac{x^3}{6}+o(x^3))} \sim \frac{-\frac{x^3}{6}}{-\frac{x^3}{3}} \to \frac{1}{2}$$

(b) Per $(x,y)\to(0,0)$, $t=|x|+|y|\to 0$ e

$$\sqrt{1+|x|+|y|}-1 = (1+t)^{1/2}-1 = \cancel{1}+\tfrac{1}{2}t+o(t)-\cancel{1} \sim \tfrac{1}{2}(|x|+|y|).$$

Quindi

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{1+|x|+|y|}-1} \sim \frac{|x|+|y|}{\frac{1}{2}(|x|+|y|)} \to 2$$

e

$$\left|\frac{xy\log(x^2+y^2)}{\sqrt{1+|x|+|y|}-1}\right| \sim \left|\frac{xy\log(x^2+y^2)}{\frac{1}{2}(|x|+|y|)}\right| \overset{CP}{=} \frac{\rho^2\log(\rho^2)\overbrace{|\cos\theta\operatorname{sen}\theta|}^{\leqslant 1}}{\frac{1}{2}\rho\underbrace{(|\cos\theta|+|\operatorname{sen}\theta|)}_{\geqslant 1}} \to 0.$$

Così

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+xy\log(x^2+y^2)+|y|}{\sqrt{1+|x|+|y|}-1} = 2+0=2.$$

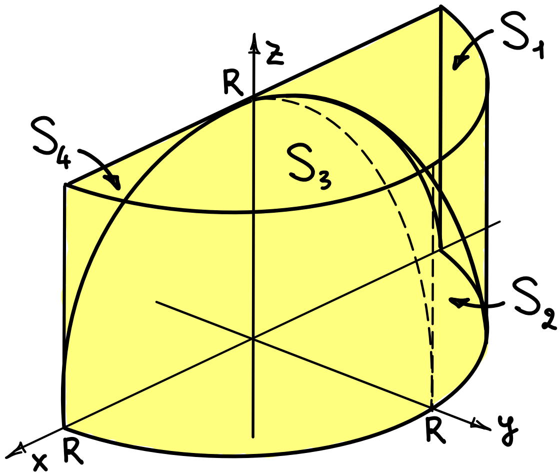
Esercizio 2. Per $R > 0$, sia S la superficie data dal bordo del solido

$$D = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le R^2 \le x^2 + y^2 + z^2,\ 0 \le z \le R,\ y \ge 0\right\}.$$

(a) Determinare la coordinata z del baricentro della superficie S.

(b) Trovare un campo vettoriale centrale $\boldsymbol{F}$ tale che il suo flusso uscente attraverso S sia uguale a 1.

(a) S è l'unione di 4 superfici:



- S_1 semicerchio superiore

$$|S_1| = \frac{\pi R^2}{2}, \quad \iint_{S_1} z\, dS = R|S_1| = \frac{\pi R^3}{2}.$$

- S_2 superficie cilindrica

$$|S_2| = \pi R^2, \quad \iint_{S_2} z\, dS = \int_0^{\pi}\int_0^{R} z\, R\, d\theta\, dz = \frac{\pi R^3}{2}.$$

- S_3 quarto di sfera

$$|S_3| = \pi R^2, \quad \iint_{S_3} z\, dS = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi} \overset{R\cos\varphi}{z}\, R^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\theta\, d\varphi = \pi R^3 \left[\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^3}{2}.$$

- S_4 rettangolo meno semicerchio

$$|S_4| = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)R^2, \quad \iint_{S_4} z\, dS = \int_{-R}^{R}\int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{R} z\, dz\, dx = \cancel{2}\int_0^R \frac{\cancel{R^2} - (\cancel{R^2} - x^2)}{\cancel{2}}\, dx = \frac{R^3}{3}.$$

Così $|S| = |S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4| = 2(\pi+1)R^2$ e

$$\bar{z} = \frac{1}{|S|}\iint_S z\, dS = \frac{1}{2(\pi+1)R^2}\left(\frac{\pi R^3}{2} + \frac{\pi R^3}{2} + \frac{\pi R^3}{2} + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{9\pi + 2}{12(\pi+1)} R.$$

(b) Consideriamo il campo centrale $\vec{F} = c \cdot (x, y, z)$ dove la costante c è da determinare. Allora

$$1 = \iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \overset{TD}{=} \iiint_D \underbrace{\operatorname{div}(\vec{F})}_{3c}\, dx\, dy\, dz = 3c|D| \Longrightarrow c = \frac{1}{3|D|} = \frac{2}{\pi R^3}$$

perché $|D| = \frac{\pi R^3}{2} - \frac{\pi R^3}{3} = \frac{\pi R^3}{6}$ $\left(\frac{1}{2}\text{ cilindro} - \frac{1}{4}\text{ sfera}\right)$.

Esercizio 3. Sia l'equazione $y + x^2 e^{y-1} = x^2 + e^{2xy}$ e sia Γ l'insieme dei punti del piano che soddisfano l'equazione data.

(a) Verificare che in un intorno di $(0,1)$ l'equazione definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ tale che $\varphi(0) = 1$ e calcolare il suo polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in 0.

(b) Determinare un punto (x_0, y_0) tale che la funzione $f(x,y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ ha un massimo relativo vincolato a Γ nel punto $(0,1)$.

(a) Sia $g(x,y) = y + x^2 e^{y-1} - x^2 - e^{2xy}$ allora

$$g_x(x,y) = 2xe^{y-1} - 2x - 2ye^{2xy}, \quad g_y(x,y) = 1 + x^2 e^{y-1} - 2xe^{2xy}$$

Dato che $g_y(0,1) = 1 \neq 0$ allora per il teo. delle funzioni implicite $\exists\, y = \varphi(x)$ tale che $\varphi(0) = 1$ e

$$\varphi'(0) = -\frac{g_x(0,1)}{g_y(0,1)} = -\frac{-2}{1} = 2.$$

Derivando due volte l'equazione rispetto a x si ha

$$\varphi' + 2xe^{\varphi-1} + x^2 e^{\varphi-1} \cdot \varphi' = 2x + e^{2x\varphi} \cdot (2\varphi + 2x\varphi')$$

$$\varphi'' + 2e^{\varphi-1} + 4xe^{\varphi-1}\varphi' + x^2 e^{\varphi-1} \cdot (\varphi')^2 + x^2 e^{\varphi-1} \cdot \varphi'' = 2 + e^{2x\varphi} \cdot (2\varphi + 2x\varphi')^2 + e^{2x\varphi} \cdot (2\varphi' + 2\varphi' + 2x\varphi'')$$

Infine ponendo $x = 0$ si trova

$$\varphi'' + \cancel{2} = \cancel{2} + 4 + 8 \Rightarrow \varphi''(0) = 12$$

e quindi

$$T_2(x) = 1 + 2x + 6x^2.$$

(b) Vincolando la funzione f a Γ in un intorno di $(0,1)$, per (a), si ottiene una funzione h in una sola variabile

$$h(x) \stackrel{d}{=} f(x, \varphi(x)) = (x - x_0)^2 + (\varphi(x) - y_0)^2.$$

Allora $(0,1)$ è un punto di massimo relativo se

$$h'(0) = 0 \quad e \quad h''(0) < 0.$$

Dato che

$$h'(x) = 2(x - x_0) + 2(\varphi(x) - y_0)\varphi'(x) \implies h'(0) = -2x_0 + 4(1 - y_0) \overset{?}{=} 0$$

e

$$h''(x) = 2 + 2(\varphi'(x))^2 + 2(\varphi(x) - y_0)\varphi''(x) \implies h''(0) = 10 + 24(1 - y_0) \overset{?}{<} 0,$$

si trovano le condizioni

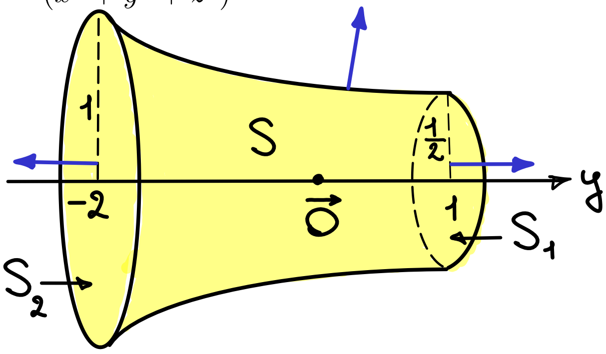
$$x_0 = 2(1 - y_0) \quad \text{e} \quad x_0 < -\frac{5}{6}.$$

Ad esempio, tali condizioni sono soddisfatte se $x_0 = -2$ e $y_0 = 2$.

Esercizio 4. Sia $S = \{(x,y,z) : (3+y)(x^2+z^2) = 1,\ y^2+y \le 2\}$.
La superficie S è orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{j} \rangle \ge 0$ in ogni suo punto.

(a) Determinare il punto di intersezione tra il piano $z=0$ e la retta passante per $P = (0,0,\frac{1}{\sqrt{3}})$ e ortogonale alla superficie S.

(b) Calcolare il flusso $\iint_S \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S} \rangle$ dove $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.



(a) S è una parte della superficie di livello 1 di
$$f(x,y,z) = (3+y)(x^2+z^2).$$
Quindi il vettore
$$\nabla f(0,0,\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = ((3+y)\cdot 2x,\ x^2+z^2,\ (3+y)\cdot 2z)\Big|_{(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}})} = (0, \tfrac{1}{3}, 2\sqrt{3})$$
è ortogonale a S in $(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}})$ e la retta ortogonale passante per P è
$$\vec{\gamma}(t) = (0,0,\tfrac{1}{\sqrt{3}}) + (0,\tfrac{1}{3},2\sqrt{3})t, \quad t \in \mathbb{R}.$$
γ interseca $z=0$ per $t = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{6}$.

Così il punto cercato è $\vec{\gamma}(-\frac{1}{6}) = (0, -\frac{1}{18}, 0)$.

(b) Chiudiamo le superficie S con i due cerchi S_1 e S_2 orientati verso l'esterno. È noto che per il campo in questione
$$\iint_{S \cup S_1 \cup S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = 4\pi$$
($\vec{O}$ è interno, vedi LEZ. 36).

Così
$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = 4\pi - \iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle - \iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$
$$= 4\pi - \left(2\pi - \frac{4\pi}{\sqrt{5}}\right) - \left(2\pi - \frac{4\pi}{\sqrt{5}}\right) = \frac{8\pi}{\sqrt{5}}$$
dove
$$\iint_{S_1} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{S_1} F_2\, dS \overset{CP}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2} \frac{\rho}{(\rho^2+1)^{3/2}}\, d\rho\, d\theta = 2\pi \left[\frac{-1}{(\rho^2+1)^{1/2}}\right]_0^{1/2} = 2\pi - \frac{4\pi}{\sqrt{5}},$$

$$\iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = -\iint_{S_2} F_2\, dS \overset{CP}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \frac{2\rho}{(\rho^2+4)^{3/2}}\, d\rho\, d\theta = 2\pi \left[\frac{-2}{(\rho^2+4)^{1/2}}\right]_0^{1} = 2\pi - \frac{4\pi}{\sqrt{5}}.$$