Analisi Matematica

Esercizi di riepilogo - Quarta parte

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arctan(x) + \dfrac{2x}{1+x^2}$.

a) Tracciare il grafico di f specificando: il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i punti di non derivabilità, i massimi e i minimi relativi, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

b) Determinare $f(D)$ dove D è il dominio di f.

c) Tracciare il grafico di $f(|x-1|)$.

a) Il dominio è $D = \mathbb{R}$.
$y = \pi/2$ è l'asintoto per $x \to +\infty$ mentre $y = -\pi/2$ è l'asintoto per $x \to -\infty$ perché

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\frac{\pi}{2} + 0 = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Non ci sono asintoti verticali.
Derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 2\,\frac{(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{3-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Quindi f è crescente in $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ed è decrescente in $(-\infty, -\sqrt{3}]$ e in $[\sqrt{3}, +\infty)$. Dunque $x = \sqrt{3}$ è un punto di massimo assoluto e $x = -\sqrt{3}$ è un punto di minimo assoluto.
Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (3-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x(x^2-7)}{(1+x^2)^3}.$$

Quindi f è convessa in $[-\sqrt{7}, 0]$ e in $[\sqrt{7}, +\infty)$ ed è concava in $(-\infty, -\sqrt{7}]$ e in $[0, \sqrt{7}]$. Così $x = 0$, $x = -\sqrt{7}$ e $x = \sqrt{7}$ sono punti di flesso.
b) Dato che $D = \mathbb{R}$ e f è continua in D, per il teorema dei valori intermedi f assume tutti i valori tra il valore massimo $f(\sqrt{3}) = \pi/3 + \sqrt{3}/2$ e il valore minimo $f(-\sqrt{3}) = -\pi/3 - \sqrt{3}/2$ ossia

$$f(D) = f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right].$$

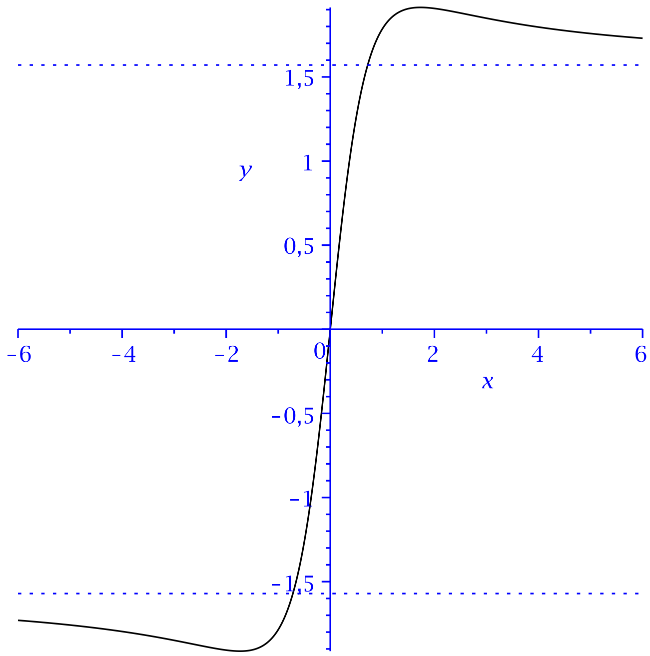

Grafico di $f(x) = \arctan(x) + \dfrac{2x}{1+x^2}$

c) Il grafico di $f(|x-1|)$ è simmetrico rispetto alla retta $x = 1$. Inoltre $f(|x-1|) = f(x-1)$ per $x \geq 1$.

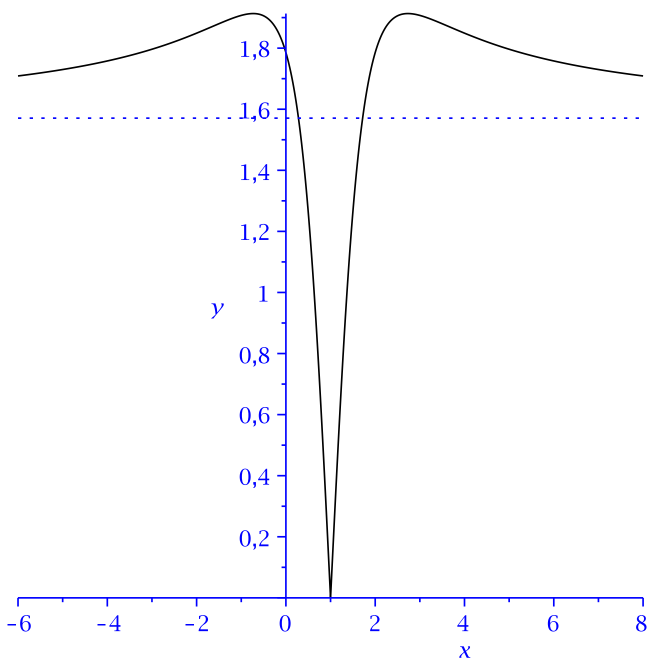

Grafico di $f(|x-1|)$

Esercizio 2. Sia $f(x) = \dfrac{1}{1+2\log(x)} - \sqrt{1+4x(1-x)}$.

a) Calcolare $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{(\sin(\pi x))^2}$.

b) Determinare se il punto $x_0 = 1$ è per f un punto di minimo relativo, massimo relativo o nessuno dei due.

a) Per $t = x - 1 \to 0$, abbiamo che

$$(\sin(\pi x))^2 = (\sin(\pi t + \pi))^2 = (-\sin(\pi t))^2 = \pi^2 t^2 + o(t^2).$$

Calcoliamo gli sviluppi fino al secondo ordine anche per $f(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+2\log(x)} = \frac{1}{1+2\log(1+t)} &= \frac{1}{1+(2t-t^2+o(t^2))} \\ &= 1-(2t-t^2+o(t^2)) + (2t-t^2+o(t^2))^2 + o(t^2) \\ &= 1-2t+(1+2^2)t^2+o(t^2) = 1-2t+5t^2+o(t^2)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sqrt{1+4x(1-x)} = \sqrt{1-4(t+t^2)} &= 1 + \frac{(-4(t+t^2))}{2} - \frac{(-4(t+t^2))^2}{8} + o(t^2) \\ &= 1-2t+\left(-\frac{4}{2}-\frac{16}{8}\right)t^2 + o(t^2) = 1-2t-4t^2+o(t^2).\end{aligned}$$

Così,

$$f(x) = 1-2t+5t^2+o(t^2) - \big(1-2t-4t^2+o(t^2)\big) = 9t^2+o(t^2).$$

Infine

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(\sin(\pi x))^2} = \lim_{t\to 0}\frac{9t^2+o(t^2)}{\pi^2t^2+o(t^2)} = \frac{9}{\pi^2}.$$

b) Dallo sviluppo di Taylor di f ottenuto in a), si ha che

$$f'(1) = 0 \quad \text{e} \quad f''(1) = 2\cdot 9 = 18 > 0$$

e quindi $x_0 = 1$ è un punto di minimo relativo.

Esercizio 3. Sia $f(x) = \dfrac{\arctan(\sqrt{6x})}{x\sqrt{x}}$.

a) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)x^a}{(\log(3+x^4))^2}\,dx$ è convergente.

b) Calcolare $\displaystyle\int_{1/6}^{+\infty} f(x)\,dx$.

a) Nell'intervallo $(0,+\infty)$, i punti da indagare sono due: 0^+ e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$,

$$\frac{f(x)x^a}{(\log(3+x^4))^2} \sim \frac{\sqrt{6}\sqrt{x}\,x^a}{x\sqrt{x}\log(3)^2} = \frac{c_1}{x^{1-a}}.$$

Per la convergenza deve valere la condizione $1-a<1$ ossia $a>0$.
Per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$\frac{f(x)x^a}{(\log(3+x^4))^2} \sim \frac{\pi/2\,x^a}{x\sqrt{x}(\log(x^4))^2} = \frac{c_2}{x^{3/2-a}(\log(x))^2}.$$

Per la convergenza deve valere la condizione $3/2-a \geq 1$ ossia $a \leq 1/2$.
Così l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $0 < a \leq 1/2$.

b) Posto $t = \sqrt{6x}$, si ha che $x = t^2/6$, $dx = tdt/3$ e

$$\begin{aligned}\int_{1/6}^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{6x})}{x\sqrt{x}}\,dx &= \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{(t^2/6)(t/\sqrt{6})}\,tdt/3\\ &= 2\sqrt{6}\int_1^{+\infty}\frac{\arctan(t)}{t^2}\,dt = \sqrt{6}\left(\frac{\pi}{2}+\log(2)\right)\end{aligned}$$

perché, integrando per parti,

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\arctan(t)}{t^2}\,dt &= \int_1^{+\infty}\arctan(t)d(-1/t)\\ &= \left[-\frac{\arctan(t)}{t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty}\frac{1}{t(1+t^2)}\,dt\\ &= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{\pi}{4} + \left[\log(t) - \frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]_1^{+\infty}\\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\log\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{\log(2)}{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 4. a) Risolvere il problema di Cauchy per $x \in (1, +\infty)$,

$$\begin{cases} xy'(x) = \dfrac{2x^2 y(x)}{1-x^2} + 2 \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

b) Determinare l'asintoto della soluzione $y(x)$ per $x \to +\infty$.

Risistemando i termini abbiamo che

$$y'(x) + \frac{2x}{x^2-1}\, y(x) = \frac{2}{x}.$$

Quindi $a(x) = \frac{2x}{x^2-1}$,

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{2x}{x^2-1}\, dx = \log(|x^2-1|)$$

e il fattore integrante è $\exp(A(x)) = |x^2-1| = x^2-1$ (si noti che $x > 1$).
Inoltre,

$$\int \exp(A(x)) f(x)\, dx = \int \frac{2(x^2-1)}{x}\, dx = \int \left(2x - \frac{2}{x}\right) dx = x^2 - 2\log(x) + c.$$

Così la soluzione generale è

$$y(x) = \exp(-A(x)) \int \exp(A(x)) f(x)\, dx = \frac{x^2 - 2\log(x) + c}{x^2-1}.$$

Imponendo la condizione $y(2) = 3$ si trova

$$3 = y(2) = \frac{4 - 2\log(2) + c}{3} \implies c = 5 + 2\log(2)$$

e la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{x^2 - 2\log(x) + 5 + 2\log(2)}{x^2-1}.$$

b) Per $x \to +\infty$,

$$y(x) = \frac{1 + \frac{-2\log(x)+5+2\log(2)}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \to 1.$$

e dunque l'asintoto cercato è $y = 1$.

Esercizio 5. Trovare tutti i punti critici della funzione $f(x,y) = 2x\log(2-y^2)+x^2$ e studiarne la natura.

Abbiamo che per $2 - y^2 > 0$,

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\log(2-y^2)+x^2\right) = 2\log(2-y^2)+2x,$$
$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x\log(2-y^2)+x^2\right) = \frac{2x(-2y)}{2-y^2} = \frac{4xy}{y^2-2}.$$

I punti critici si ottengono risolvendo $\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (0,0)$ ossia

$$\begin{cases} 2\log(2-y^2)+2x=0 \\ \dfrac{4xy}{y^2-2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log(2-y^2)+2x=0 \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2\log(2-y^2)+2x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} 2-y^2=1 \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2\log(2)+2x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm 1 \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=-\log(2) \\ y=0 \end{cases}$$

e quindi i punti critici sono: $(0,1)$, $(0,-1)$ e $(-\log(2),0)$.
Inoltre le derivate seconde di f sono:

$$f_{xx}(x,y) = 2,$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{4y}{y^2-2},$$
$$f_{yy}(x,y) = 4x\frac{y^2-2-2y^2}{(y^2-2)^2} = -\frac{4x(y^2+2)}{(y^2-2)^2}.$$

Calcoliamo la matrice hessiana $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$ nei punti critici:

$$H_f(0,\pm 1) = \begin{bmatrix} 2 & \mp 4 \\ \mp 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_f(-\log(2),0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\log(2) \end{bmatrix}.$$

Dato che $\det(H_f(0,\pm 1)) = -16 < 0$ allora $(0,\pm 1)$ sono punti di sella.
Dato che $\det(H_f(-\log(2),0)) = 4\log(2) > 0$ e $f_{xx}(-\log(2),0) = 2 > 0$ allora $(-\log(2),0)$ è un punto di minimo relativo.