

Analisi Matematica

Esercizi di riepilogo - Terza parte

Esercizio 1. Sia

$$f(x) = \arcsin \left(\frac{x^2 - |x + 2|}{x^2 + 2} \right).$$

- a) Determinare il dominio di f .
- b) Quali sono gli asintoti di f ?

a) Il denominatore $x^2 + 2$ è sempre diverso da zero. Inoltre, dato che la funzione arcoseno è definita nell'intervallo $[-1, 1]$, dobbiamo imporre che valga la doppia disequazione

$$-1 \leq \frac{x^2 - |x + 2|}{x^2 + 2} \leq 1$$

ossia

$$-(x^2 + 2) \leq x^2 - |x + 2| \leq x^2 + 2$$

e quindi

$$-2 \leq |x + 2| \leq 2x^2 + 2.$$

La disuguaglianza a sinistra è sempre soddisfatta e dunque rimane da risolvere quella a destra. Spezziamo l'analisi a seconda del segno dell'argomento del modulo:

$$\begin{cases} x + 2 < 0 \\ -x - 2 \leq 2x^2 + 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x + 2 \leq 2x^2 + 2 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x < -2 \\ 2x^2 + x + 4 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq -2 \\ (2x - 1)x \geq 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x < -2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 1/2 \end{cases}$$

Dunque il dominio è

$$D = (-\infty, 0] \cup [1/2, +\infty).$$

b) La funzione è continua in D e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi $y = \pi/2$ è l'unico asintoto di f .

Esercizio 2. Siano

$$f(x) = (e^x - e^{-x})^2 - \frac{2x^2}{1+x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = x \left(\log \left(1 + x - \frac{x^2}{2} \right) - x \right).$$

a) Calcolare i polinomi di Taylor di ordine $n = 4$ di f e g in $x_0 = 0$.

b) Qual è l'asintoto della funzione $h(x) = \frac{f(1/x)}{g(1/x)}$ per $x \rightarrow +\infty$?

a) Abbiamo che

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) \right)^2 \\ &\quad - 2x^2(1 - x^2 + o(x^2)) \\ &= \left(2x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \right)^2 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4) \\ &= \left(4x^2 + \frac{4x^4}{3} + o(x^4) \right) - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4) = 2x^2 + \frac{10x^4}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

e quindi il polinomio di Taylor di ordine $n = 4$ di f in $x_0 = 0$ è $T_{4,f}(x) = 2x^2 + \frac{10x^4}{3}$.

Inoltre

$$\begin{aligned} g(x) &= x \left(\left(x - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^2}{2} \right)^3 + o(x^3) - x \right) \\ &= x \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = -x^3 + \frac{5x^4}{6} + o(x^4) \end{aligned}$$

e quindi il polinomio di Taylor di ordine $n = 4$ di g in $x_0 = 0$ è $T_{4,g}(x) = -x^3 + \frac{5x^4}{6}$.

b) Per $x \rightarrow +\infty$ allora $t = 1/x \rightarrow 0^+$ e per a),

$$h(x) = \frac{f(1/x)}{g(1/x)} = \frac{T_{4,f}(1/x) + o(1/x^4)}{T_{4,g}(1/x) + o(1/x^4)} = \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{10}{3x^4} + o(1/x^4)}{-\frac{1}{x^3} + \frac{5}{6x^4} + o(1/x^4)} = \frac{2x^2 + \frac{10}{3} + o(1)}{-x + \frac{5}{6} + o(1)}.$$

Quindi

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = -2$$

e

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - (-2x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \frac{10}{3} + o(1) + 2x(-x + \frac{5}{6} + o(1))}{-x + \frac{5}{6} + o(1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{10}{3} + o(1) + x(\frac{5}{3} + o(1))}{-x + \frac{5}{6} + o(1)} = \frac{5/3}{-1} = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Così l'asintoto cercato è $y = -2x - \frac{5}{3}$.

Esercizio 3. Sia la seguente equazione di secondo grado in \mathbb{C} :

$$z(z - 2\sqrt{2}i) = 2\sqrt{3}i.$$

- a) Calcolare le radici quadrate del discriminante Δ .
- b) Determinare le soluzioni dell'equazione in forma cartesiana.

a) Risistemando i termini si trova

$$z^2 - 2\sqrt{2}iz - 2\sqrt{3}i = 0$$

e quindi il discriminante Δ è uguale a

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2}i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2\sqrt{3}i) \\ &= -8 + 8\sqrt{3}i = 16\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 16e^{2\pi i/3}.\end{aligned}$$

Allora le sue due radici quadrate sono

$$\pm 4e^{\pi i/3} = \pm 4\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \pm 2(1 + i\sqrt{3}).$$

b) Infine le due soluzioni dell'equazione in forma cartesiana sono:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2i\sqrt{2} + 2(1 + i\sqrt{3})}{2} = 1 + i(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

e

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2i\sqrt{2} - 2(1 + i\sqrt{3})}{2} = -1 + i(\sqrt{2} - \sqrt{3}).$$

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy per $x \in (0, +\infty)$,

$$\begin{cases} y'(x) = 4x - \frac{2y(x)}{3\sqrt[3]{x}} \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

Risistemando i termini si ha

$$y'(x) + \frac{2y(x)}{3\sqrt[3]{x}} = 4x.$$

Una primitiva di $a(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ per $x > 0$ è

$$A(x) = \int \frac{2}{3}x^{-1/3} dx = x^{2/3}.$$

Così il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{x^{2/3}}.$$

Quindi, con la sostituzione $s = x^{2/3}$, abbiamo che $x = s^{3/2}$, $dx = \frac{3}{2}s^{1/2} ds$ e

$$\begin{aligned} \int e^{A(x)} f(x) dx &= \int e^{x^{2/3}} 4x dx = 4 \int e^s 4s^{3/2} \frac{3}{2}s^{1/2} ds \\ &= 6 \int s^2 e^s ds = 6(s^2 - 2s + 2)e^s + c \\ &= 6(x^{4/3} - 2x^{2/3} + 2)e^{x^{2/3}} + c. \end{aligned}$$

Allora la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x) dx = 6(x^{4/3} - 2x^{2/3} + 2) + ce^{-x^{2/3}}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = 5$ abbiamo che

$$5 = y(1) = 6 + ce^{-1} \implies c = -e$$

e la soluzione cercata in $(0, +\infty)$ è

$$y(x) = 6(x^{4/3} - 2x^{2/3} + 2) - e^{1-x^{2/3}}.$$

Esercizio 5. a) Calcolare $\int_2^3 \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx$.

b) Esiste $t > 0$ tale che $\int_0^t \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx = 0$?

a) Abbiamo che

$$\frac{x-1}{x^2-4x+5} = \frac{x-1}{(x-2)^2+1}$$

e dunque con la sostituzione $t = x - 2$ si ha $x = t + 2$, $dx = dt$ e

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx &= \int_0^1 \frac{(t+2)-1}{t^2+1} dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \log(t^2+1) + \arctan(t) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \log(2) + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

b) Consideriamo la funzione integrale

$$F(t) = \int_0^t \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione F è continua in $[0, +\infty)$.

Dato che per $x \in [0, 1)$, $\frac{x-1}{x^2-4x+5} < 0$ allora $F(1) < 0$. Inoltre, per $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{x-1}{x^2-4x+5} \sim \frac{1}{x}$$

e quindi l'integrale improprio è divergente,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x^2-4x+5} dx = +\infty.$$

Allora per il teorema degli zeri deve esistere un valore $t > 1$ tale $F(t) = 0$.