

Analisi Matematica

Esercizi di riepilogo - Seconda parte

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6 \arcsin(x/2) - \pi x^2}{\sin(\pi x)} \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(1 + \frac{x^2}{2} + x^3\right)^{4/x} - e^{2x}}{1 - \cos(x)}.$$

a) Il limite è della forma $0/0$. Applichiamo il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6 \arcsin(x/2) - \pi x^2}{\sin(\pi x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{6/2}{\sqrt{1-x^2/4}} - 2\pi x}{\pi \cos(\pi x)} = \frac{\frac{3}{\sqrt{3/4}} - 2\pi}{-\pi} = -\frac{2\sqrt{3}}{\pi} + 2.$$

b) Per $x \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x^2}{2} + x^3\right)^{4/x} &= \exp\left(\frac{4}{x} \log\left(1 + \frac{x^2}{2} + x^3\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{4}{x} \left(\frac{x^2}{2} + x^3 + o(x^3)\right)\right) \\ &= \exp(2x + 4x^2 + o(x^2)) \\ &= 1 + 2x + 4x^2 + o(x^2) + \frac{1}{2}(2x + 4x^2 + o(x^2))^2 + o(x^2) \\ &= 1 + 2x + 6x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(1 + \frac{x^2}{2} + x^3\right)^{4/x} - e^{2x}}{1 - \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2x + 6x^2 + o(x^2) - \left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(6 - 2)x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 8. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Sia

$$f(x) = 4x - \log(|e^{2x} - 1|).$$

- a) Trovare tutti gli asintoti di f .
- b) Determinare gli intervalli di monotonia di f .
- c) Trovare il numero di soluzioni dell'equazione $e^{4x} = c|e^{2x} - 1|$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

a) Per il dominio dobbiamo imporre che $e^{2x} - 1 \neq 0$ ossia $x \neq 0$ da cui $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

e quindi $x = 0$ è un asintoto verticale.

Inoltre per $x \rightarrow +\infty$ c'è l'asintoto obliquo $y = 2x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x - \log(e^{2x} - 1) = 4x - \log(e^{2x}(1 - e^{-2x})) \\ &= 4x - 2x - \log(1 - e^{-2x}) = 2x + o(1). \end{aligned}$$

Mentre per $x \rightarrow -\infty$ c'è l'asintoto obliquo $y = 4x$:

$$f(x) = 4x - \log(1 - e^{2x}) = 4x + o(1).$$

b) Per $x \neq 0$,

$$f'(x) = 4 - \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1} = \frac{2(e^{2x} - 2)}{e^{2x} - 1}$$

pertanto f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ e in $\left[\frac{\log(2)}{2}, +\infty\right)$ e f è strettamente decrescente in $\left(0, \frac{\log(2)}{2}\right]$. Quindi $x = \frac{\log(2)}{2}$ è un punto di minimo relativo con $f\left(\frac{\log(2)}{2}\right) = 2 \log(2)$.

c) Se $c \leq 0$ non ci sono soluzioni perché $e^{4x} > 0$ e $|e^{2x} - 1| \geq 0$. Se $c > 0$ allora applicando il logaritmo ad entrambi i membri si trova che l'equazione è equivalente a $f(x) = \log(c)$. Per i limiti calcolati in a) e lo studio della monotonia visto in b), ancora per il teorema dei valori intermedi, l'equazione $f(x) = \log(c)$ ha

$$\begin{cases} 1 \text{ soluzione per } \log(c) < 2 \log(2), \text{ ossia per } 0 < c < 4 \\ 2 \text{ soluzioni per } \log(c) = 2 \log(2), \text{ ossia per } c = 4 \\ 3 \text{ soluzioni per } \log(c) > 2 \log(2), \text{ ossia per } c > 4. \end{cases}$$

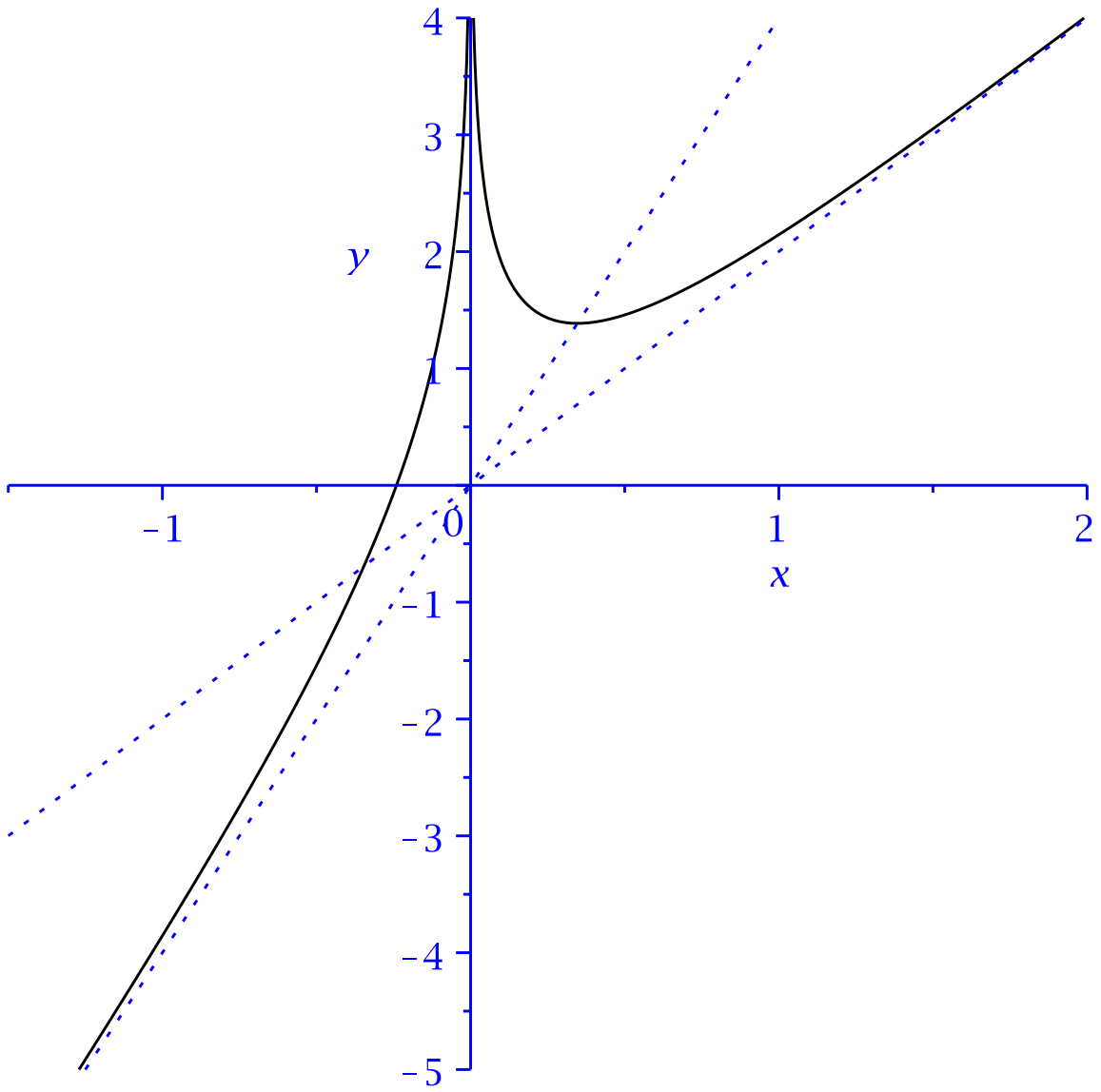


Grafico di $f(x) = 4x - \log(|e^{2x} - 1|)$.

Esercizio 3. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^4 \frac{(5 + 3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2\alpha-1}}{(4x - x^2)^\alpha} dx$$

e calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Nell'intervallo $(0, 4)$ i punti da indagare sono due: 0^+ e 4^- .

Per $x \rightarrow 0^+$,

$$\frac{(5 + 3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2\alpha-1}}{(4x - x^2)^\alpha} \sim \frac{5x^{2\alpha-1}}{4^\alpha x^\alpha} = \frac{5}{4^\alpha} \cdot \frac{1}{x^{1-\alpha}}.$$

Quindi la condizione per la convergenza è $1 - \alpha < 1$, ossia $\alpha > 0$.

Per $x \rightarrow 4^-$,

$$\frac{(5 + 3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2\alpha-1}}{(4x - x^2)^\alpha} \sim \frac{C}{(4 - x)^\alpha}$$

e la condizione per la convergenza è $\alpha < 1$.

Così, l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $0 < \alpha < 1$.

Ora calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{5 + 3\sqrt{x}}{(4x - x^2)^{1/2}} dx &= 5 \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} + 3 \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4 - x}} \\ &= 5 \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4 - (x - 2)^2}} + 3 \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4 - x}} \\ &= 5 \int_0^4 \frac{dx}{2\sqrt{1 - (\frac{x}{2} - 1)^2}} + 3 \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4 - x}} \\ &= 5 \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} - 3 \int_4^0 t^{-1/2} dt \\ &= 5 [\arcsin(t)]_{-1}^1 + 3 \left[\frac{t^{1/2}}{1/2} \right]_0^4 \\ &= 5\pi + 12 \end{aligned}$$

dove nel primo integrale è stata fatta la sostituzione $t = \frac{x}{2} - 1$ e nel secondo $t = 4 - x$.

Esercizio 4. Risolvere il seguente problema di Cauchy per $x \in (0, +\infty)$,

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x^2 + x} = (x^2 + x)e^x \\ y(1) = 2e \end{cases}$$

Prima determiniamo una primitiva di $a(x) = 1/(x^2 + x)$ per $x > 0$,

$$\begin{aligned} A(x) &= \int \frac{1}{x(x+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \log(x) - \log(x+1) = \log\left(\frac{x}{x+1}\right) \end{aligned}$$

e dunque il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = \frac{x}{x+1}.$$

Quindi integriamo

$$\begin{aligned} \int e^{A(x)} f(x) dx &= \int \frac{x}{x+1} (x^2 + x)e^x dx = \int x^2 e^x dx \\ &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + \int 2e^x dx \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + c. \end{aligned}$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x) dx = \frac{x+1}{x} ((x^2 - 2x + 2)e^x + c).$$

Ora imponiamo la condizione $y(1) = 2e$:

$$y(1) = 2(e + c) = 2e$$

da cui $c = 0$. Così la soluzione cercata in $(0, +\infty)$ è

$$y(x) = \frac{x+1}{x} (x^2 - 2x + 2)e^x.$$

Esercizio 5. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$,

$$\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

Dimostriamo separatamente le due disuguaglianze per induzione.

$$1) \forall n \geq 1, \quad \sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (P(n)).$$

Passo base. Verifichiamo $P(1)$: $\sqrt{1} = 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1}}$.

Passo induttivo. Dimostriamo che, per $n \geq 1$, se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \stackrel{P(n)}{\geq} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato l'ipotesi induttiva. Resta da verificare che

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$$

ossia

$$\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \geq n+1 \Leftrightarrow \sqrt{n^2+n} \geq n \Leftrightarrow n^2+n \geq n^2$$

che è vera.

$$2) \forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} \quad (P(n)).$$

Passo base. Verifichiamo $P(1)$: $\frac{1}{\sqrt{1}} = 1 < 2 = 2\sqrt{1}$.

Passo induttivo. Dimostriamo che, per $n \geq 1$, se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \stackrel{P(n)}{<} 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato l'ipotesi induttiva. Resta da verificare che

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$$

ossia

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 &\leq 2n + 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{n^2+n} \leq 2n + 1 \\ &\Leftrightarrow 4n^2 + 4n \leq (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

che è vera.