

Analisi Matematica

Esercizi di riepilogo - Prima parte

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{x}) \log \left| \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right|}{((x-2)^2 + \log(\frac{x}{2})) \log |x-2|}$$

calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Per $x \rightarrow 0^+$ si ha che

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{2} \log \left(\frac{\pi x}{2} \right)}{\log \left(\frac{x}{2} \right) \log(2)} = \frac{\sqrt{2} (\log(x) + \log \left(\frac{\pi}{2} \right))}{(\log(x) - \log(2)) \log(2)} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\log(2)}.$$

Così

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\log(2)}.$$

Per $x \rightarrow 2$, posto $t = x - 2 \rightarrow 0$, si ha

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{t+2}) \log \left| \sin \left(\frac{\pi(t+2)}{2} \right) \right|}{(t^2 + \log(\frac{t+2}{2})) \log |t|} = \sqrt{2} \frac{(1 - \sqrt{1 + \frac{t}{2}}) \log \left| \sin \left(\frac{\pi t}{2} \right) \right|}{(t^2 + \log(1 + \frac{t}{2})) \log |t|}.$$

Dato che per $t \rightarrow 0$,

$$1 - \sqrt{1 + \frac{t}{2}} = 1 - \left(1 + \frac{t}{4} + o(t) \right) \sim -\frac{t}{4},$$
$$t^2 + \log \left(1 + \frac{t}{2} \right) = t^2 + \frac{t}{2} + o(t) \sim \frac{t}{2}$$

e

$$\frac{\log \left| \sin \left(\frac{\pi t}{2} \right) \right|}{\log |t|} = \frac{\log \left(\frac{\pi |t|}{2} + o(t) \right)}{\log |t|} \sim \frac{\log |t| + \log \left(\frac{\pi}{2} \right)}{\log |t|} \rightarrow 1,$$

abbiamo che

$$f(x) \sim \sqrt{2} \cdot \frac{-t/4}{t/2} \cdot 1 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

e dunque

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 2. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 - |\log(x)|}$$

specificando: dominio, segno, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Per il dominio dobbiamo imporre che $x > 0$ e $\log(x) \neq \pm 1$ da cui

$$D = (0, 1/e) \cup (1/e, e) \cup (e, +\infty).$$

La funzione non si annulla mai in D , è positiva in $(1/e, e)$ ed è negativa altrove.

I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow (1/e)^\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow e^\pm} f(x) = \mp\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

Quindi $y = 0$ è l'asintoto per $x \rightarrow +\infty$, mentre $x = 1/e$ e $x = e$ sono asintoti verticali.

Derivata prima. Per $x \in D \cap (0, 1)$,

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + \log(x)} \right) = -\frac{1}{x(1 + \log(x))^2}$$

e per $x \in D \cap (1, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 - \log(x)} \right) = \frac{1}{x(1 - \log(x))^2}$$

da cui si deduce che f è decrescente in $(0, 1/e)$ e in $(1/e, 1)$, mentre f è crescente in $(1, e)$ e in $(e, +\infty)$. Così $x = 1$ è un punto di minimo relativo con $f(1) = 1$ (non ci sono punti di minimo/massimo assoluto). Inoltre $x = 1$ è anche un punto angoloso:

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x(1 - \log(x))^2} = 1 \quad \text{e} \quad f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x(1 + \log(x))^2} = -1.$$

Si noti che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$.

Derivata seconda. Per $x \in D \cap (0, 1)$,

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{x(1 + \log(x))^2} \right) = \frac{(1 + \log(x))^2 + 2x(1 + \log(x))/x}{x^2(1 + \log(x))^4} = \frac{3 + \log(x)}{x^2(1 + \log(x))^3}$$

e per $x \in D \cap (1, +\infty)$,

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x(1 - \log(x))^2} \right) = -\frac{(1 - \log(x))^2 - 2x(1 - \log(x))/x}{x^2(1 - \log(x))^4} = \frac{1 + \log(x)}{x^2(1 - \log(x))^3}$$

da cui si deduce che f è convessa in $(0, 1/e^3]$, $(1/e, 1)$ e in $(1, e)$, mentre f è concava in $[1/e^3, 1/e)$ e in $(e, +\infty)$. Così $x = 1/e^3$ è un punto di flesso.

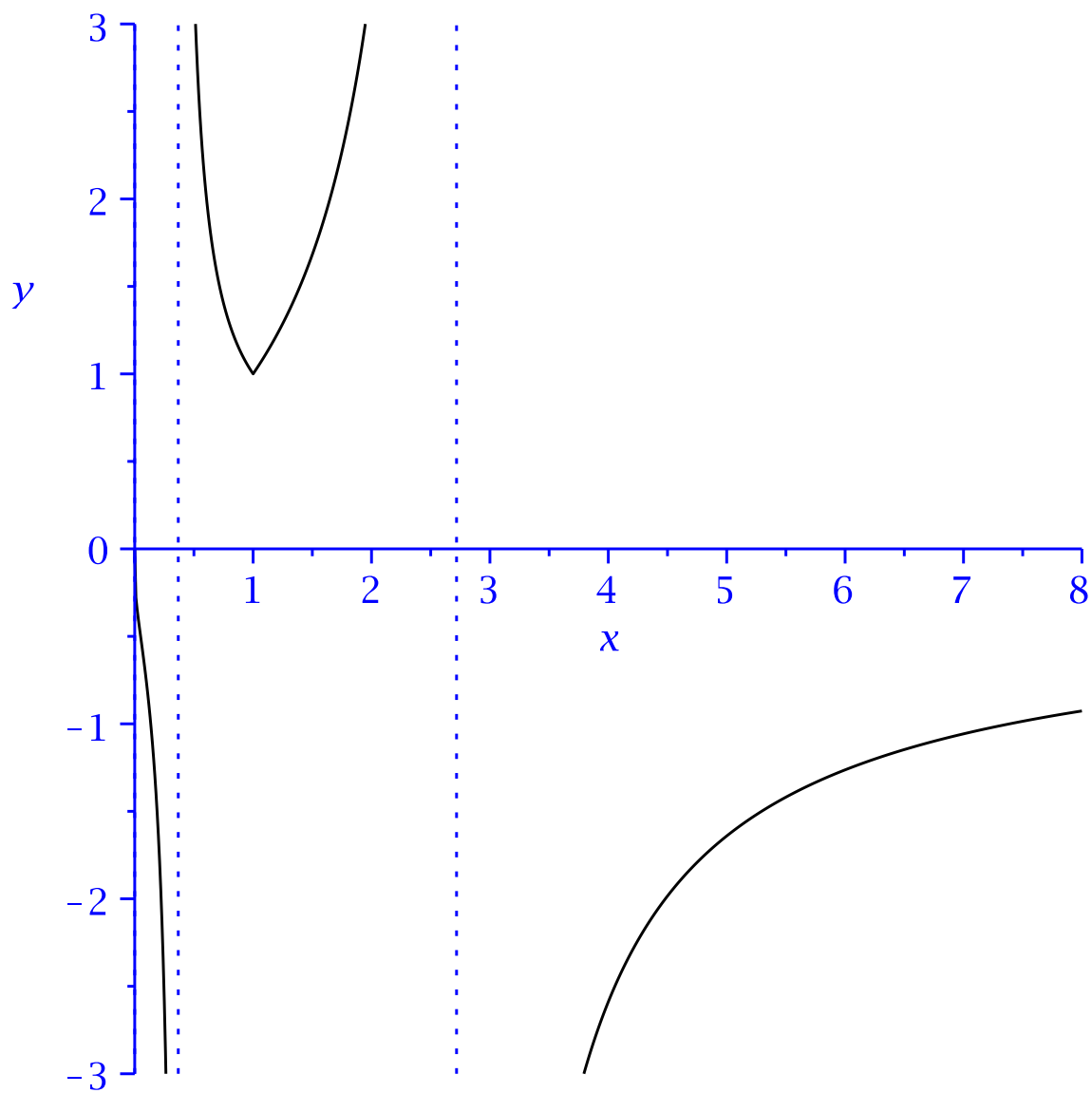


Grafico di $f(x) = \frac{1}{1 - |\log(x)|}$.

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_0^2 \arctan\left(\frac{x}{2-x}\right) dx.$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^2 \arctan\left(\frac{x}{2-x}\right) dx &= \left[x \arctan\left(\frac{x}{2-x}\right) \right]_0^2 - \int_0^2 x \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2-x}\right)^2} \frac{(2-x) + x}{(2-x)^2} dx \\ &= \pi - \int_0^2 \frac{x}{x^2 - 2x + 2} dx. \end{aligned}$$

Calcoliamo integrale rimanente tenendo presente che il polinomio $x^2 - 2x + 2$ è irriducibile con $\Delta < 0$: con la sostituzione $x = t + 1$, si ha che

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x}{x^2 - 2x + 2} dx &= \int_{-1}^1 \frac{t+1}{t^2+1} dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{t}{t^2+1} dt + \int_{-1}^1 \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= 0 + 2 \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= 2 [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_0^2 \arctan\left(\frac{x}{2-x}\right) dx = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 4. Determinare se la seguente serie è convergente

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left(\exp \left(\frac{k^2 + 3k}{k^2 + 1} \right) - \exp \left(\frac{k}{k-2} \right) \right).$$

Ricordando che $(1+t)^{-1} = 1 - t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, allora per $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{k^2 + 3k}{k^2 + 1} = \frac{1 + 3/k}{1 + 1/k^2} = \left(1 + \frac{3}{k}\right) \left(1 - \frac{1}{k^2} + o(1/k^2)\right) = 1 + \frac{3}{k} + o(1/k)$$

e in modo simile

$$\frac{k}{k-2} = \frac{1}{1 - 2/k} = 1 + \frac{2}{k} + o(1/k).$$

Allora analizzando il termine della serie si trova che

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{k^2 + 3k}{k^2 + 1} \right) - \exp \left(\frac{k}{k-2} \right) &= \exp \left(1 + \frac{3}{k} + o(1/k) \right) - \exp \left(1 + \frac{2}{k} + o(1/k) \right) \\ &= e \cdot \left(\exp \left(\frac{3}{k} + o(1/k) \right) - \exp \left(\frac{2}{k} + o(1/k) \right) \right) \\ &= e \cdot \left(\left(1 + \frac{3}{k} + o(1/k) \right) - \left(1 + \frac{2}{k} + o(1/k) \right) \right) \\ &\sim \frac{e}{k} \end{aligned}$$

e quindi, per il criterio del confronto asintotico, dato che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$, anche la serie data diverge.

Esercizio 5. Risolvere

$$|z| + iz\operatorname{Re}(z) = z^2.$$

Ponendo $z = x + iy$ con x e y numeri reali e sostituendo nell'equazione si ha che

$$\sqrt{x^2 + y^2} + i(x + iy)x = (x + iy)^2$$

ossia

$$\sqrt{x^2 + y^2} + ix^2 - xy = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Separando la parte reale e la parte immaginaria otteniamo

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - xy = x^2 - y^2 \\ x^2 = 2xy \end{cases}$$

Dalla seconda equazione $x(x - 2y) = 0$ otteniamo che $x = 0$ oppure $x = 2y$, da cui

$$\begin{cases} |y| = -y^2 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \sqrt{5}|y| - 2y^2 = 4y^2 - y^2 \\ x = 2y \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} |y| = -y^2 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} |y| = \sqrt{5}y^2 \\ x = 2y \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} |y|(1 + |y|) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} |y|(1 - \sqrt{5}|y|) = 0 \\ x = 2y \end{cases}.$$

Risolvendo si ottiene

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y \in \{0, 1/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}\} \\ x = 2y \end{cases}.$$

Così le soluzioni dell'equazione data sono tre:

$$0, \quad \frac{2+i}{\sqrt{5}}, \quad -\frac{2+i}{\sqrt{5}}.$$