# ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 33

## INTRODUZIONE AL CALCOLO DIFFERENZIALE IN DUE O PIÙ VARIABILI

Una FUNZIONI DI $n$ VARIABILI reali a valori reali

$$f : D \to \mathbb{R} \quad \text{con } D \subseteq \mathbb{R}^n$$

è una corrispondenza che assegna ad ogni punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ (dominio di $f$) il valore $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$.

Per semplicità qui considereremo solo il caso $n=2$ dove $x_1 = x$, $x_2 = y$.

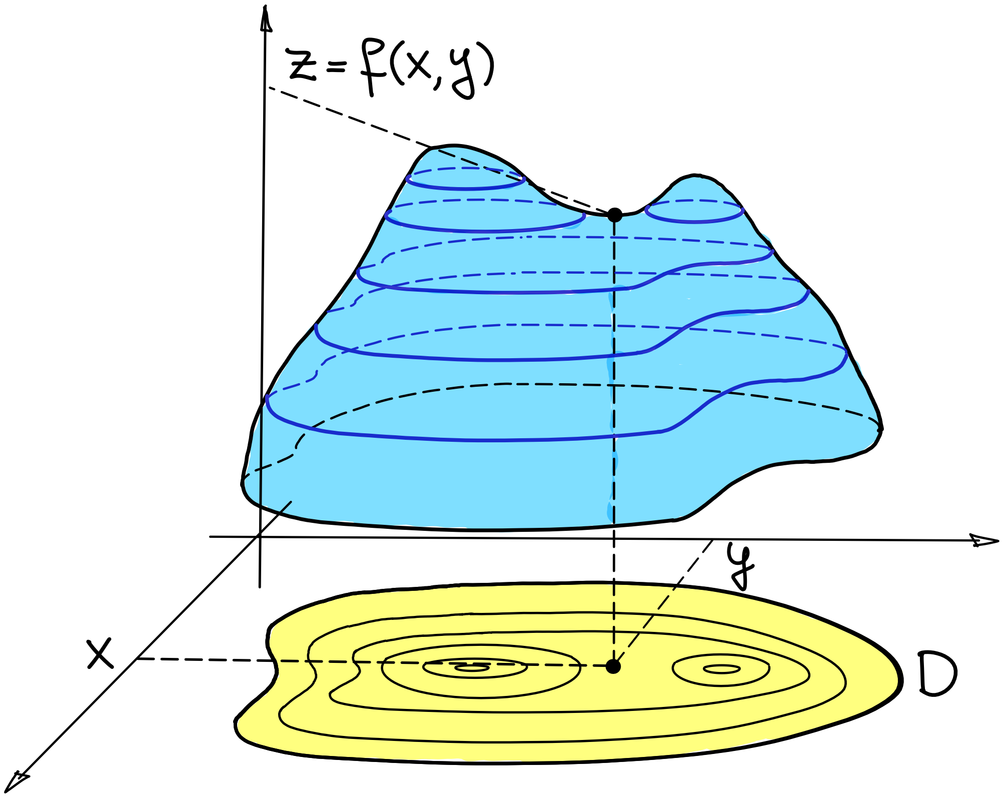
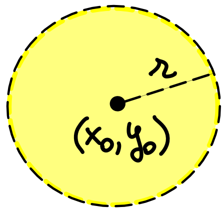



grafico di $f = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}$.

Introducendo le definizione di INTORNO di un punto $(x_0,y_0)$ di raggio $r>0$

$$B_r(x_0,y_0)=\left\{(x,y):\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r\right\}$$



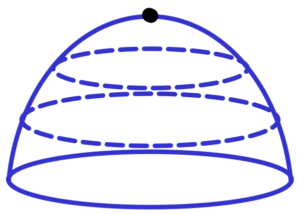

si estendono le nozioni di limite e continuità.
Inoltre abbiamo le seguenti definizioni.

$(x_0,y_0)\in D$ è un punto di MASSIMO RELATIVO di $f$ se

$$\exists r>0: \forall (x,y)\in B_r(x_0,y_0)\cap D \quad f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$$

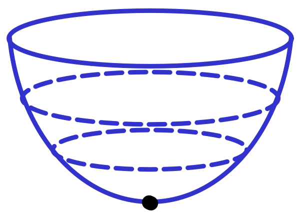
$(x_0,y_0)\in D$ è un punto di MINIMO RELATIVO di $f$ se

$$\exists r>0: \forall (x,y)\in B_r(x_0,y_0)\cap D \quad f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$$



$f(x,y)=-x^2-y^2$

$(0,0)$ PUNTO DI MAX. REL.



$f(x,y)=x^2+y^2$

$(0,0)$ PUNTO DI MIN. REL.

DERIVATA PARZIALE di $f(x,y)$ RISPETTO A $x$ in $(x_0,y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

notazioni alternative

DERIVATA PARZIALE di $f(x,y)$ RISPETTO A $y$ in $(x_0,y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

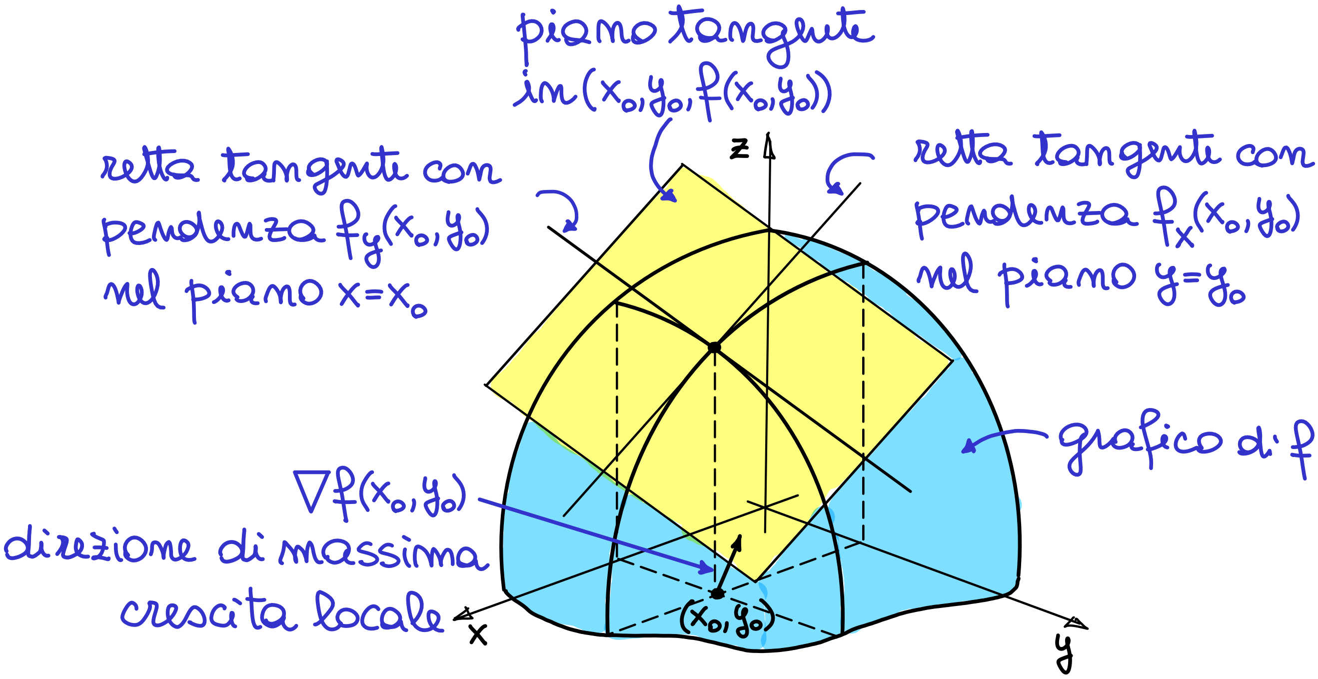
La coppia di derivate parziali definisce il vettore GRADIENTE di $f(x,y)$ in $(x_0,y_0)$

$$\nabla f(x_0,y_0) = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)).$$

Se $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$ allora $(x_0,y_0)$ si dice PUNTO CRITICO.

L'equazione del PIANO TANGENTE al grafico di $f$ nel punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ è

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$




OSSERVAZIONE

Le definizioni date implicano che

1) per il calcolo di $f_x$ si deriva $f$ rispetto a $x$ nel modo usuale trattando $y$ come una costante;

2) per il calcolo di $f_y$ si deriva $f$ rispetto a $y$ nel modo usuale trattando $x$ come una costante.

**ESEMPIO**

- $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

$f$ è definita in $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 9\}$

Le derivate parziali sono:

$$f_x(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \quad e \quad f_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

Il gradiente di $f$ in $(0,0)$ è

$$\nabla f(0,0)=(f_x(0,0),f_y(0,0))=(0,0)$$ punto critico

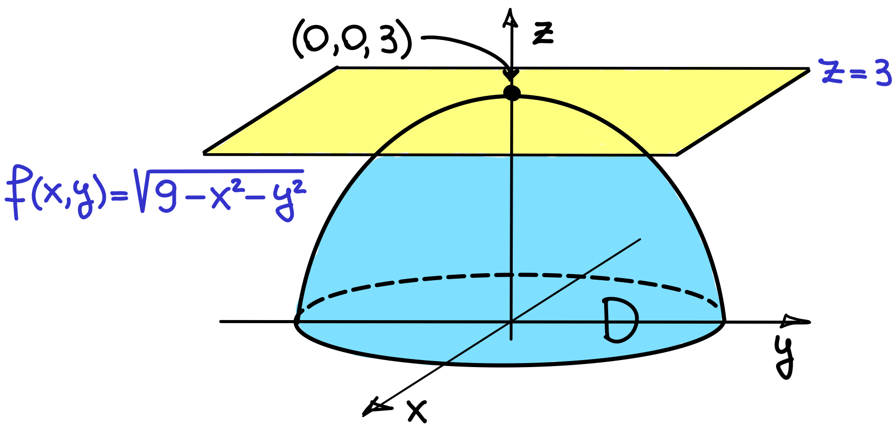
Il gradiente di $f$ in $(2,1)$ è

$$\nabla f(2,1)=(f_x(2,1),f_y(2,1))=\left(-1,-\tfrac{1}{2}\right)$$

Le equazioni dei piani tangenti al grafico di $f$ nei punti $(0,0,f(0,0))$ e $(2,1,f(2,1))$ sono

$(0,0,3) \Rightarrow z=3+0\cdot(x-0)+0\cdot(y-0)=3$ PIANO ORIZZONTALE

$(2,1,2) \Rightarrow z=2-1\cdot(x-2)-\frac{1}{2}\cdot(y-1)=\frac{9}{2}-x-\frac{1}{2}y$

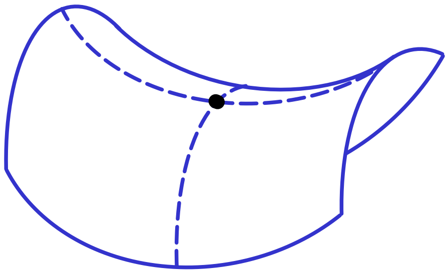



OSSERVAZIONE Se $f$ è $C^1$ (f, ∇f continui) in un intorno di $(x_0,y_0)$ e $(x_0,y_0)$ è un punto di max/min relativo di $f$ allora $(x_0,y_0)$ è un punto critico.

Tuttavia non tutti i punti critici sono max/min relativi. Ci sono anche i punti di sella.

$(x_0,y_0)\in D$ è un punto di SELLA di $f$ se $(x_0,y_0)$ è un punto critico e

$$\forall r>0: \begin{array}{l} \exists\,(x_1,y_1)\in B_r(x_0,y_0)\cap D : f(x_1,y_1)>f(x_0,y_0) \\ \exists\,(x_2,y_2)\in B_r(x_0,y_0)\cap D : f(x_2,y_2)<f(x_0,y_0) \end{array}$$



$f(x,y)=x^2-y^2$

$(0,0)$ PUNTO DI SELLA

Per studiare la natura di un punto critico è utile introdurre le DERIVATE PARZIALI SECONDE:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_x)(x_0,y_0)=f_{xx}(x_0,y_0) \qquad \frac{\partial}{\partial y}(f_x)(x_0,y_0)=f_{xy}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_y)(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0) \qquad \frac{\partial}{\partial y}(f_y)(x_0,y_0)=f_{yy}(x_0,y_0)$$

Le quattro derivate seconde sono gli elementi della MATRICE HESSIANA:

$$H_f(x_0,y_0)=\begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

DETERMINANTE

$$\det(H_f)=f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}\cdot f_{yx}$$

Nel caso in cui le derivate seconde siano continue si dimostra che $f_{xy}=f_{yx}$.

In analogia a quanto visto in una variabile si introduce il POLINOMIO DI TAYLOR del secondo ordine di $f$ in $(x_0, y_0)$:

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)$$

$f, \nabla f, H_f$ continui

Se $f$ è $C^2$ in un intorno di $(x_0,y_0)$ allora

$$f(x,y) = T_2(x,y) + o\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right) \text{ per } (x,y) \to (x_0,y_0).$$

Tale relazione permette lo studio di $f$ "vicino" a $(x_0,y_0)$. In particolare si dimostra il seguente criterio.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CRITERIO DELLE DERIVATE SECONDE)

Sia $(x_0,y_0)$ un punto critico di $f$.

1) Se $\det(H_f(x_0,y_0)) > 0$ e $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ allora $(x_0,y_0)$ è un massimo relativo.

2) Se $\det(H_f(x_0,y_0)) > 0$ e $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ allora $(x_0,y_0)$ è un minimo relativo.

3) Se $\det(H_f(x_0,y_0)) < 0$ allora $(x_0,y_0)$ è un punto di sella.

OSSERVAZIONE Nel caso in cui $\det(H_f(x_0,y_0)) = 0$ il criterio è inconcludente.

ESEMPIO

- Determinare tutti i punti critici di

$$f(x,y)=x^3+8y^3-12xy \qquad D=\mathbb{R}^2$$

e studiarne la natura.

Le derivate parziali prime di $f$ sono

$$f_x(x,y)=3x^2-12y \quad , \quad f_y(x,y)=24y^2-12x$$

e quindi i punti critici di $f$ si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 3x^2-12y=0 \\ 24y^2-12x=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2=4y \\ 2y^2=x \end{cases}, \quad \begin{cases} (2y^2)^2=4y \\ 2y^2=x \end{cases} \rightarrow y(y^3-1)=0$$

$$y=0 \rightarrow x=0 \qquad y=1 \rightarrow x=2$$

Così i punti critici sono:

$$(0,0) \text{ e } (2,1).$$

Le derivate parziali seconde di $f$ sono

$$f_{xx}(x,y)=6x, \quad f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-12, \quad f_{yy}(x,y)=48y.$$

e quindi la matrice hessiana è

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{bmatrix}$$

Infine

$$H_f(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(H_f)=-12^2<0 \Rightarrow$$ (0,0) PUNTO DI SELLA

$$H_f(2,1)=\begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{bmatrix} \quad \det(H_f)=12\cdot 48-12^2>0, \quad f_{xx}=12>0 \Rightarrow$$ (2,1) PUNTO DI MINIMO RELATIVO