ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 32

ESEMPI

- Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{\bar{z}} = 2+i .$$

Si ha che

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{|1-i|^2} = \frac{1}{2}(\cancel{1}+2i+\cancel{i^2}) = i \Longrightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = i^2 = -1$$

e così l'equazione diventa

$$\frac{1}{\bar{z}} = 3+i \,, \quad \bar{z} = \frac{1}{3+i} = \frac{3-i}{|3+i|^2} = \frac{3-i}{9+1} = \frac{3-i}{10} .$$

Quindi la soluzione è $z = \overline{(\bar{z})} = \dfrac{3+i}{10}$.

- Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z(\bar{z}+2) = 2(z+|3-4i|) .$$

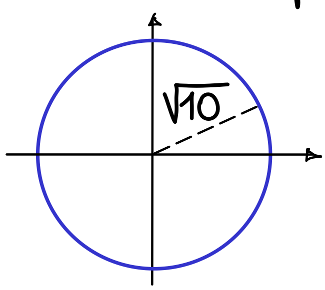
Intanto

$$|3-4i| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

e ricordando che $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ si ha

$$|z|^2 + \cancel{2z} = \cancel{2z} + 10 \,, \quad |z|^2 = 10 \,, \quad |z| = \sqrt{10}$$

da cui ci sono infinite soluzioni: i punti della circonferenza $|z| = \sqrt{10}$



• Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

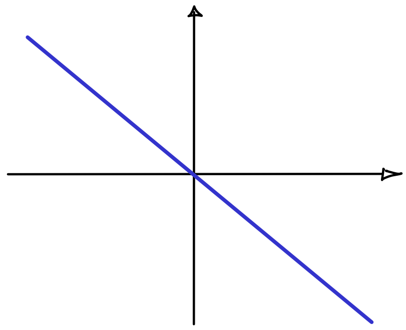
$$\operatorname{Im}(z^2) + |z|^2 = 0.$$

Poniamo $z = x + iy$. Allora $|z|^2 = x^2 + y^2$ e

$$z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy \Rightarrow \operatorname{Im}(z^2) = 2xy.$$

Così l'equazione diventa

$$2xy + x^2 + y^2 = 0, \quad (x+y)^2 = 0, \quad y = -x$$



Ci sono infinite soluzioni:

$$z = x - ix \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ossia i punti della retta $y = -x$.

• Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$|z| = |z - 2i|.$$

Poniamo $z = x + iy$. Allora $z - 2i = x + i(y-2)$ e l'equazione diventa

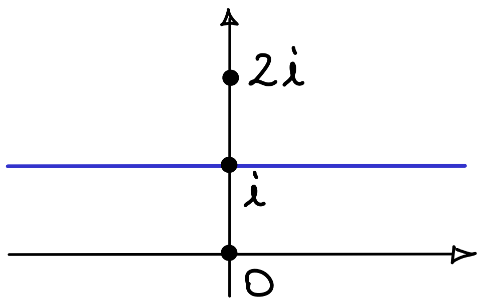
$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2},$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4y + 4, \quad y = 1.$$

Quindi le soluzioni sono:

$$z = x + i \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

tutti i punti della retta $y = 1$.



OSSERVAZIONE

Per l'equazione di secondo grado

$$\underbrace{a}_{\neq 0} z^2 + bz + c = 0 \quad \text{con } a,b,c \in \mathbb{C}$$

continua a valere la formula risolutiva

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{con } \Delta = b^2 - 4ac$$

dove, se $\Delta \neq 0$, $\pm\sqrt{\Delta}$ rappresenta le due radici quadrate di $\Delta = |\Delta| e^{i\varphi}$ ossia $\pm\sqrt{|\Delta|}e^{i\varphi/2}$.

- Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$2z(z+4i) = 8-i.$$

L'equazione si riscrive come

$$2z^2 + 8iz + (-8+i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 8i \\ c = -8+i \end{cases}$$

Allora

$$\Delta = (8i)^2 - 4\cdot 2(-8+i) = -64+64-8i = -8i = 8e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

le cui radici quadrate sono

$$\pm\sqrt{8}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = \pm 2\sqrt{2}\left(\overset{-1/\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)} + i\,\overset{1/\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}\right) = \pm 2(-1+i).$$

Così

$$z_{1,2} = \frac{1}{4}\left(-8i \pm 2(-1+i)\right) \begin{matrix} \nearrow & z_1 = -\dfrac{1+3i}{2} \\ \searrow & z_2 = \dfrac{1-5i}{2} \end{matrix}$$

• Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$|z|^8 = 16z^4.$$

Confrontando i moduli di entrambi i membri si ha $|z|^8 = |16z^4| = 16|z|^4$, $|z|^4(|z|^4 - 16) = 0$ da cui $|z| = 0$ e $|z| = \sqrt[4]{16} = 2$.

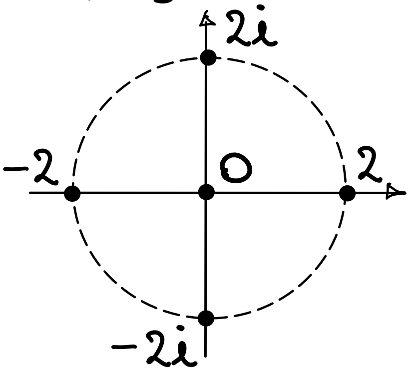
1) Se $|z| = 0$ allora $z = 0$ che è soluzione.

2) Se $|z| = 2$ allora l'equazione diventa $2^8 = 16z^4$ ossia $z^4 = 16$ che è risolta dalle radici quarte di $16 = 16e^{i0}$

$$z_k = \sqrt[4]{16} \exp\left(i\,\frac{0 + 2\pi k}{4}\right) \quad \text{con } k = 0,1,2,3$$

che in forma cartesiana si scrivono come

$$z_0 = 2,\ z_1 = 2i,\ z_2 = -2,\ z_3 = -2i$$



In conclusione le soluzioni sono 5:

$0, 2, 2i, -2, -2i$

$z^4 = 16$ si può anche risolvere così

$$0 = z^4 - 16 = (z^2 - 4)(z^2 + 4) = (z-2)(z+2)(z-2i)(z+2i)$$

e le soluzioni sono $2, 2i, -2, -2i$.

OSSERVAZIONE

Dalla formula di Eulero

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$$

si ottengono le relazioni

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x) + \cos(-x) + i\,\mathrm{sen}(-x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(x) + \cancel{i\,\mathrm{sen}(x)} + \cos(x) - \cancel{i\,\mathrm{sen}(x)}\right)$$

$$= \cos(x)$$

$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x) - \cos(-x) - i\,\mathrm{sen}(-x)\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\cancel{\cos(x)} + i\,\mathrm{sen}(x) - \cancel{\cos(x)} + i\,\mathrm{sen}(x)\right)$$

$$= \mathrm{sen}(x).$$

- $\int \cos^2(x)\,dx$?

Dato che

$$\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(2x) + 1\right)$$

si ha

$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{2}\int 1\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2x) + \frac{x}{2} + C.$$

- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx$?

Dato che

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$\operatorname{sen}^4(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3\right)$$

si ha

$$\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx = \frac{1}{8}\int \cos(4x)\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{3}{8}\int dx$$

$$= \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{3}{8}x + c.$$

OSSERVAZIONE

Si dimostra che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$i^2 = -1$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \cos(x) + i\operatorname{sen}(x)$$

confermando la formula di Eulero.